Physics Lib
JAN 9 1948

Akustische Zeitschrift

Im Auftrage der

DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

unter Mitwirkung der

DEUTSCHEN REICHSPOST und PHYSIKAL.-TECHN. REICHSANSTALT

herausgegeben von

MARTIN GRÜTZMACHER und ERWIN MEYER

1. E. Gerlach: Kristalltonabnehmer mit bruchsicher eingebauter Kristallplatte und Saphirnadel 81

2. L. Schwarz: Zur Theorie der Beugung einer ebenen Schallwelle an der Kugel 91

3. Schrifttum 118

Drittes Heft Achter Jahrgang Mai 1943

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Akustische Zeitschrift

Die Zeitschrift erscheint in 6 Heften je Jahrgang. Der Bezugspreis beträgt 10,— RM. je Jahrgang. Von den Originalbeiträgen und zusammenfassenden Berichten stehen den Verfassern 30 Sonderdrucke unberechnet zur Verfügung. Weitere Exemplare werden berechnet und müssen bei Rückgabe der Fahnenkorrekturen bestellt werden.

Schriftleitung:

Dr. Martin Grützmacher, Oberregierungsrat und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin NW 87, Franklinstr. 22

Dr. Erwin Meyer, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin und Abteilungsvorsteher am Vierjahresplaninstitut für Schwingungsforschung, Berlin NW 87, Franklinstr. 1

*

Beiträge, sowie alle die Schriftleitung betreffenden Zuschriften werden erbeten an:
Dr. Martin Grützmacher, Berlin NW 87, Franklinstr. 22

7786

PHYSIK UND TECHNIK DER GEGENWART: FERNMELDETECHNIK

Ein neuer Band von Prof. Dr. R. Feldtkeller

Einführung in die Theorie der Spulen und Übertrager mit Eisenblechkernen befindet sich im Druck. Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Drittes Heft | Achter Jahrgang | Mai 1943

Kristalltonabnehmer mit bruchsicher eingebauter Kristallplatte und Saphirnadel

Von E. Gerlach

Mitteilung aus dem Telefunken-Laboratorium

(Mit 12 Textabbildungen)

Aufgabenstellung

Die Schallrillen auf einer Schallplatte weisen Amplituden auf, die maximal den Betrag von etwa 70 μ erreichen können. Da bei Kristalltonabnehmern das Hebelübersetzungsverhältnis zwischen der Nadelspitze und dem Angriffspunkt der Kraft an der Kristallplatte in der Regel nicht sehr von 1 : 1 verschieden ist, so treten an den Kristallplatten ähnliche Maximalamplituden auf, die indessen für diese Platten keine besondere mechanische Beanspruchung darstellen. Bis zur Bruchgrenze ist immer noch eine ausreichende Sicherheit gegeben, obgleich das Seignettesalz an sich sehr spröde ist und obgleich man in vielen Fällen durch kleine, unvermeidliche Herstellungsungenauigkeiten beim Zusammenbau der normalen Kristall-Tonabnehmer schon eine mechanische Vorbeanspruchung der Kristallplatte in Kauf nehmen muß. Viel größer sind dagegen die Beanspruchungen, die in der Praxis durch unsachgemäße Behandlung oder durch gelegentliche Versehen hervorgerufen werden, wie dies immer wieder vorkommen wird. Den hierbei auftretenden Stoßbeanspruchungen wird die Kristallplatte auf keinen Fall gewachsen sein, so daß unter allen Umständen Vorkehrungen getroffen werden müssen, um ein Zerbrechen der spröden Kristallplatte zu verhindern. Ein ähnlicher Fall liegt bei der „Saphirnadel" vor. Auch hier kann sehr leicht durch unsanftes Hantieren eine Beschädigung zustande kommen.

A = Achse der Schwingungen
F = Andruck-Schraubenfedern
L_1 = vorderes, schwingendes Auflager
L_2 = hinteres, feststehendes Auflager
N = Saphirnadel
Pl = Kristalldoppelplatte
d = der Betrag, um den sich die Platte abhebt

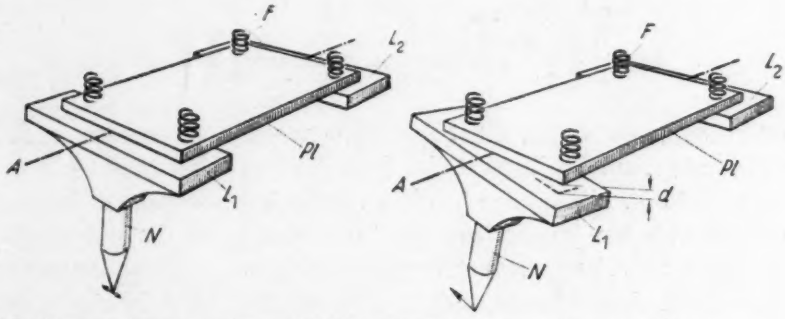
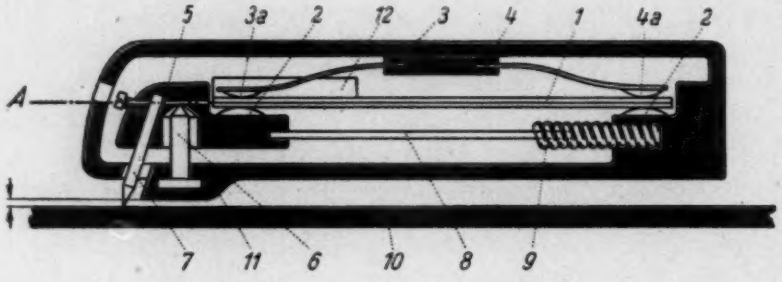


Abb. 1. Abheben der Kristallplatte von ihrem Auflager beim Auftreten übermäßiger Amplituden links: Normallage; rechts: abgehobene Kristallplatte

Bruchsicherer Einbau von Kristallplatten

Um die Kristallplatte des neuen Tonabnehmers einwandfrei vor dem Zerbrechen zu schützen, wurde ein Prinzip angewendet, das in der Abb. 1 schematisch veranschaulicht wird. Die Kristallplatte *Pl* liegt hinten auf

dem feststehenden Auflager L_2 auf. Das vordere Auflager L_1 ist beweglich, und zwar kann es Drehbewegungen um die durch bauliche Maßnahmen festgelegte Achse A ausführen. Die Schwingungen der Nadel N werden somit tordierend auf die Kristallplatte Pl einwirken. Die vier Ecken der Platte sind indessen — dies ist wesentlich — nicht fest mit dem vorderen und hinteren Auflager verbunden, sondern sie werden vielmehr lediglich durch Federkräfte, die in der Abb. 1 durch die 4 Federn F veranschaulicht werden, auf die Auflager gedrückt. Die Federkräfte sind so bemessen, daß sie einerseits groß genug sind, um die Platte im normalen Betriebe, d. h. bei den kleinen Amplituden, die durch die Schallrillen verursacht werden, auf den Lagerstellen festzuhalten, wie dies in Abb. 1 links angedeutet ist. In diesem Falle ist zwischen dieser lösbaren Verbindung und einer unlösbar starren Verbindung kein Unterschied. Andererseits sind die Federkräfte wiederum so gering bemessen, daß bei größeren als den betriebsmäßigen Amplituden die Platte sich eher von der Lagerstelle abhebt, wie dies in Abb. 1 rechts zu sehen ist, als daß etwa eine Ecke abbricht. Auf diese Weise ist eine Zerstörung der Kristallplatte tatsächlich unmöglich gemacht.



1 = Kristalldoppelplatte
2 = Auflagerbuckel
3 = vordere Andruck-Blattfeder mit Buckel 3a
4 = hindere Andruck-Blattfeder mit Buckel 4a
5 = Preßmassestück
6 = Lagerspitze
7 = Saphirnadel
8 = Halterungsstange
9 = weiche Schraubenfeder
10 = Grammophonplatte
11 = Vorsprung am Tonabnehmer gehäuse

Abb. 2. Schnitt durch den Kristall-Tonabnehmer (halbschematisch)

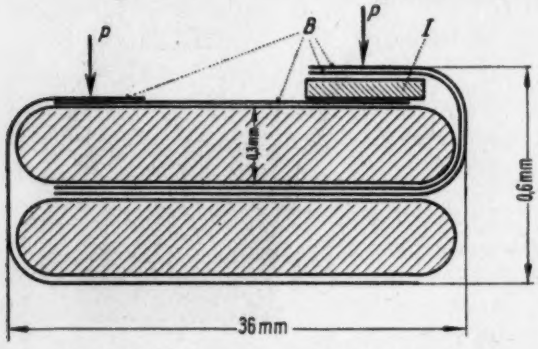
Die praktische Durchführung des bruchsicheren Einbaues

Abb. 2 zeigt halbschematisch einen Querschnitt durch einen Tonabnehmer, bei dem das obige Konstruktionsprinzip zur Anwendung gekommen ist. Die Kristallplatte 1, die genauer gesagt eigentlich eine Doppelplatte ist, d. h. in bekannter Weise aus zwei miteinander verkitteten Einzelplatten besteht, besitzt die Gestalt eines langgestreckten Rechteckes und ist in der Abb. 2 hochkant zu sehen. Sie liegt mit ihren 4 Ecken auf 4 buckelförmigen Erhöhungen 2. Auf die 4 Buckel wird die Platte 1 durch 2 Blattfedern 3 und 4 mit einer bestimmten, begrenzten Kraft angedrückt. Das Isolierstück 5 ist auf der Spitze 6 beweglich und führt um die Achse A, veranlaßt durch die in den Rillen schwingende Nadel 7, Drehschwingungen aus, die die Platte 1 tordieren. Das Drahtstück 8, das durch die sehr weiche Schraubenfeder 9 an dem einen Ende befestigt ist, bildet eine Halterung für das Isolierstück 5 und verhindert, daß dieses Bewegungen in anderen Richtungen ausführt als in der gewünschten.

Diese Bauart erfüllt außerdem die Forderung, daß keinerlei Metallteile des Tonabnehmers, die einer Berührung von außen zugänglich sind, Verbindung mit den elektrischen Leitungen haben, die nach dem Innern des netzangeschlossenen nachfolgenden Verstärkers führen und möglicherweise einmal auf irgendeine Weise Netzspannung bekommen könnten. Man kann zwischen der Nadel (bzw. der metallischen Fassung der Saphirnadel) und den Zuleitungen zum Tonabnehmer eine Prüfspannung von 2000 Volt in Anwendung bringen. Ferner ist die Mindeststrecke für die Kriechwege größer als 3 mm, so daß eine Gefährdung des Benutzers ausgeschlossen ist.

Die Federn 3 und 4 dienen gleichzeitig zur

Stromabnahme. Die Kristallplatte selbst besitzt keine Kontaktfahnen. Die Kontakte werden vielmehr dadurch gebildet, daß die Belegungen *B*, wie die Abb. 3 im Längsschnitt zeigt, an den Enden der Platten umgelegt und festgeklebt werden. Das Isolationspapier *I* trennt die Pole voneinander. Die Pfeile *P* geben die Stellen an, wo die Druckfedern 3 und 4 (Abb. 2) den Kontakt herstellen. Die Dickenmaße sind in Abb. 3 stark übertrieben.



B = Belegungen, *I* = Isolationspapier
P = Druckstellen der Kontakte

Abb. 3. Kontaktabnahme bei Kristall-Doppelplatten ohne Zuhilfenahme von Kontaktfahnen

In Wirklichkeit bildet die Doppelplatte ein 0,6 mm starkes Plättchen, dessen Einbau sehr einfach ist, weil es nur eingelegt zu werden braucht.

Dadurch, daß die Federn 3 und 4 der Abb. 2 nur mit einem begrenzten Druck auf die Platte 1 drücken, ist nach dem in Abb. 1 dargestellten Prinzip die Platte vor dem Zerbrechen vollkommen geschützt. Aber auch der Saphir 7 ist gleichzeitig mitgeschützt, denn der Druck, den die Saphirspitze von der Schallplatte 10 her erfahren kann, ist niemals größer als der Druck, den die Feder 3 hervorbringt, weil bei größerem Druck von unten her die Saphirspitze nach oben gedrückt wird, bis sie hinter dem Anschlag 11 verschwindet. Wird der Tonabnehmer versehentlich fallengelassen, so fängt also der Anschlag 11 den ganzen Stoß auf, während die Nadel 7, das Isolierstück 5, der Halterungsdraht 8, die Kristallplatte 1 und die Feder 3 nach oben eine kleine Federungsbewegung ausführen, bei der die Spitzenlagerung auf der Spitze 6 sich löst. Hört der zu große Druck auf die Saphirspitze auf, so federn die Teile wieder zurück und die Spitzenlagerung auf der Spitze 6 stellt sich wieder her. Da der Anschlag 11 eine verhältnismäßig große Auflagefläche besitzt, so tritt bei einem Fallenlassen des Tonabnehmers auch keine Beschädigung der Schallplatte auf. Dasselbe ist der Fall, wenn bei aufgesetzter Saphirspitze der Tonabnehmer gewaltsam seitwärts über die Rillen gestoßen wird. Dies darf man sogar tun, während gleichzeitig der Tonabnehmer zusätzlich stark belastet wird.

Demonstrationsversuche bezüglich der Bruchsicherheit

Als verblüffende Demonstrationsversuche, die wegen des entstehenden akustischen Lärmes bei eingeschaltetem Lautsprecher besonders wirkungsvoll sind, kann man folgendes vorführen: Bei laufender Platte wird der Tonabnehmer irgendwie beliebig auf die Platte fallengelassen. Während des Spieles stößt man seitlich gegen den Tonabnehmer, so daß dieser um 50 oder 100 Rillen seitwärts springt. Man drückt stark von oben auf den Tonabnehmer und „ratscht" dabei seitlich beliebig über die Schallrillen. Schließlich kann man auch während des Spielens mit einem „Hammer" auf den Tonabnehmer schlagen; solange dabei die Schallplatte nicht zerbricht, treten nicht die mindesten Beschädigungen auf, weder an der Saphirnadel, noch an der Schallplatte, noch am Kristallelement.

Messung der Schwingungseigenschaften mittels schwingender Zungen

Kristalltonabnehmer geben bei konstanten Amplituden der Kristallplatte frequenzunabhängige, konstante Spannungen an ihren Klemmen ab, wenn man sie nicht belastet, d. h. wenn man sie mit einem hochohmigen Verstärkereingang verbindet. Um einen Kristalltonabnehmer auf die Schwingungseigenschaften seines mechanischen Aufbaues zu untersuchen, ist es deshalb am einfachsten und übersichtlichsten, die Nadelspitze mit konstanten Amplituden im ganzen Frequenzbereich zu erregen und die er-

zeugte Spannung im unbelasteten Zustand zu registrieren. Ist die Aufgabe, die Schwingungen der Nadelspitze verzerrungsfrei auf die Kristallplatte zu übertragen, einwandfrei gelöst, so ergibt sich als Frequenzkurve eine horizontale gerade Linie.

Wie weiter unten auseinandergesetzt werden wird, ist es möglich, mit einer elektromagnetisch bewegten schwingenden Eisenzunge konstante Amplituden in dem Frequenzbereich von 50—10000 Hz zu erhalten. Setzt man die Nadelspitze in eine an der Eisenzunge angebrachte Rille, so macht die Nadel die Schwingungen der Zunge mit. Da die Zunge absichtlich so schwer wie möglich gemacht ist, d. h. eine große Masse besitzt, und da ihre Eigenschwingung bei etwa 14000 Hz liegt, so beeinflußt das Aufsetzen des Tonabnehmers, der nur eine sehr geringe träge Masse und sehr wenig Richtkraft hinzubringt, die Schwingungen der Zunge praktisch unmerklich wenig. Dies läßt sich leicht überprüfen, da die Schwingungen der Zunge während des Betriebes gemessen werden können.

Wollte man magnetische Tonabnehmer auf diese Weise messen, so müßte man, wenn man einfache Verhältnisse haben will, der Zunge nicht konstante, sondern der Frequenz umgekehrt proportionale Amplituden geben und hätte weiterhin die Schwierigkeit zu überwinden, den Tonabnehmer vor dem starken Streufeld der Erregerspule der schwingenden Eisenzunge vollständig zu schützen.

Die Messung auf der schwingenden Zunge ist sehr genau, weil keinerlei Nebenumstände das Bild fälschen. Die Meßfrequenzen können vollkommen kontinuierlich verändert werden. Gelangt man beim Durchlaufen des Frequenzbereiches an eine auffällige Stelle der Frequenzkurve, so kann man anhalten und in aller Ruhe durch Abtasten der einzelnen schwingenden Teile des Systems die Ursache der Unregelmäßigkeit feststellen. Im Gegensatz hierzu ist die Messung mit Frequenzplatten, die an sich als Abschlußmessung nicht entbehrt werden kann, für die Entwicklung des Schwingsystems wesentlich unvorteilhafter: Eine ständige Unruhe in der Tonkurve, wie man sie z. B. im BRAUNschen Rohr deutlich sehen kann, erschwert von vornherein die Messungen, die Nadelabnutzung und der Abstand vom Plattenmittelpunkt beeinflussen die Amplituden, man kann nicht beliebig rasch und beliebig feinfühlig die Frequenz wechseln und die dauernde Anwendung eines wirklich konstanten Schwingungszustandes ist unmöglich.

In Abb. 4 ist die Meßeinrichtung schematisch dargestellt. Zwischen den Polen *N* und *S* eines Magneten sind zwei Polschuhe 1 und 2

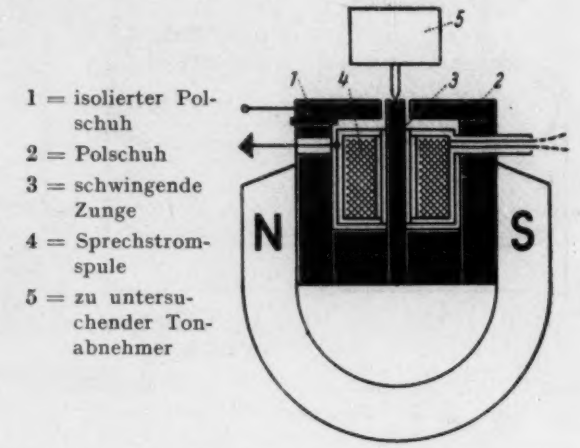


Abb. 4. Schwingende Eisenzunge für konstante Amplituden von 50 Hz bis 10 kHz mit kapazitiver Meßmöglichkeit der Amplituden

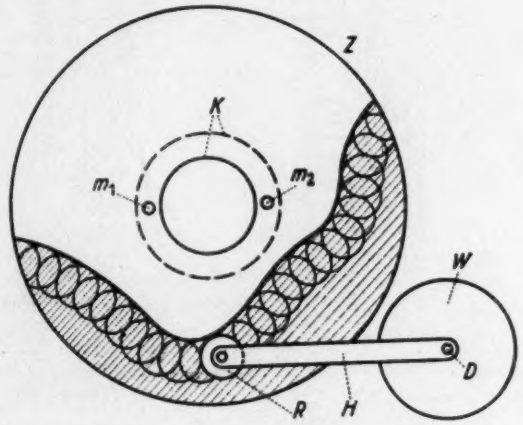
befestigt, zwischen denen die Zunge 3 schwingt, wenn die Spule 4 mit Tonfrequenzstrom beschickt wird. Die Rille in der Zunge, in der die Nadel des zu untersuchenden Tonabnehmers 5 ruht, ist mit steilen Flanken und mit unverrundetem Rillengrund ausgeführt, so daß die Mitnahme der Nadel, wie dies auch durch besondere Versuche bewiesen wurde, in allen Fällen sichergestellt ist. Um die wahren Amplituden der Zunge im Betrieb messen zu können, ist der Polschuh 1 isoliert aufgesetzt und als feste Elektrode eines Kondensatormikrophons geschaltet, wobei die schwingende Zunge die Stelle der schwingenden Membran des Mikrophons vertritt.

Das in Abb. 4 dargestellte Meßzungensystem gestattet, in einem Zuge den ganzen Frequenzbereich von 35 Hz bis 10000 Hz zu über-

streichen. Die Amplituden betragen hierbei maximal einige μ. Um zu untersuchen, ob der Tonabnehmer imstande ist, die maximal vorkommenden Amplituden von etwa 70 μ (und sicherheitshalber möglichst noch mehr) einwandfrei sinusförmig zu bringen, wurde eine zweite Meßzunge für den Bereich von 20 Hz bis lediglich 300 Hz gebaut, jedoch mit maximalen Amplituden von 200 μ. Mit dieser Meßzunge läßt sich das Verhalten des Schwingsystems bei großen Amplituden zuverlässig und bequem studieren.

Herstellung von Spannungen vorgegebener Frequenzabhängigkeit

Verbindet man die Spule einer Meßzunge mit einem Tongenerator, so erhält man zunächst infolge des Einflusses der Eisenverluste und der Anpassung keine konstanten Amplituden der Zunge. Um diese für die rasche Abwicklung der Messungen lästige Unvollkommenheit zu beseitigen, wurde am Tongenerator die Anbringung von empirischen Regelschablonen vorgesehen, die es gestatten, innerhalb weiter Grenzen jeden beliebigen Frequenzgang rasch, zuverlässig und ohne großen Aufwand herzustellen. In Abb. 5 ist diese Einrichtung, die ganz allgemein verwendbar ist, schematisch dargestellt. Auf der Achse des die Frequenz einstellenden Drehknopfes K des Tongenerators können mit Hilfe von 2 Kordelmuttern m_1 und m_2 Zinkscheiben Z (leicht austauschbar) befestigt werden. Ein Regelwiderstand w, der die Spannung des Tongenerators regelt, wird durch Drehung des Hebels H eingestellt. In Wirklichkeit ist zwischen der Drehbewegung des Hebels H, der um den Drehpunkt D nur Winkelbewegungen von vielleicht 30° ausführt und der Achse des Widerstandes W noch eine totgangfreie Übersetzung zwischengeschaltet. Um einen beliebigen, vorgegebenen Frequenzgang herzustellen wird eine Zinkscheibe Z auf den Knopf K und am freien Hebelende eine flache Rolle R (Zeichenrolle) aufgesetzt, die auf der Fläche der Zinkscheibe Z gleitet. Jetzt werden an demjenigen Punkt der an den Tongenerator angeschlossenen Schaltung, an dem man einen vorgegebenen Frequenzgang haben will, durch schrittweises Einstellen des Drehknopfes K und der Rolle R der vorgegebene Frequenzgang (z. B. konstanter Strom, konstante Spannung, frequenzproportionaler Stromanstieg usw.) empirisch hergestellt und dabei die jeweiligen Stellungen der Rolle R mit der Reißnadel auf der Zinkscheibe angezeichnet. Längs der Umhüllenden der angerissenen Kreisbögen wird die Zinkscheibe zersägt, so daß man



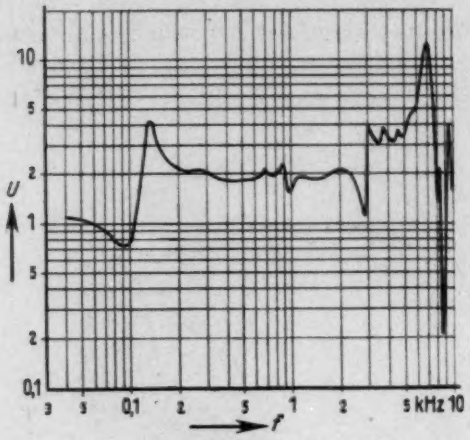
K = Frequenzeinstellknopf des Summers
Z = Auf dem Einstellknopf befestigte Zinkscheibe
R = Auf der Zinkschablone abrollende Rolle
W = Lautstärkeregler mit dem um den Drehpunkt D beweglichen Einstellhebel H
m = Kordelmutter zum bequemen Auswechseln der Zinkschablone

Abb. 5. Herstellung einer empirischen Regelschablone zur Erzielung eines vorgegebenen Frequenzganges

eine Schablone erhält. Ersetzt man die Zeichenrolle R durch eine gleichgroße, aber breitere Rolle, die auf der gewonnenen Schablone abrollt, so bewirkt der Regelwiderstand selbsttätig die gewünschte Regelung. Für öfters vorkommende Messungen verschiedener Art kann man eine Reihe von passenden Schablonen vorrätig halten. Es ist klar, daß man auf diese Weise sehr genau und vor allem viel weniger mühsam als dies mit elektrischen Mitteln möglich ist, jeden beliebigen Frequenzgang herstellen kann. Die Grenze des Verfahrens wird dadurch gegeben, daß die Rolle R auf der Schablone Z nicht beliebige Steigungen nehmen kann. Tritt dieser Fall einmal ein, so kann man sich rasch durch eine elektrische Entzerrung helfen, die stets leicht herstellbar

ist, weil sie nur ganz ungefähr richtig zu sein braucht.

Auf diese Weise wurden für die betriebsmäßige Zusammenschaltung von Tongenera-



U = Spannung an den Klemmen des Tonabnehmers in relativem Maß

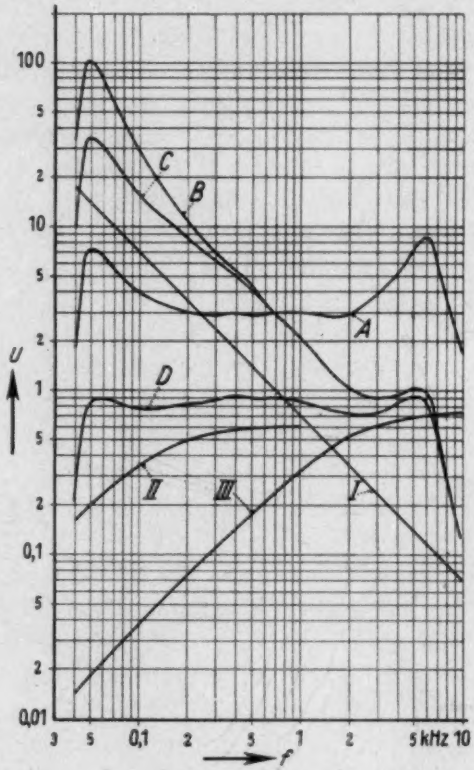
Abb. 6. Stark unregelmäßige, jedoch meßtechnisch genau reproduzierbare Kurve eines mangelhaften Tonabnehmers

tor, Verstärker und Meßzunge konstante Amplituden an der Zungenrille hergestellt. Ein einmaliges Durchdrehen des Tongenerators liefert das vollständige Schwingungsbild des zu prüfenden Tonabnehmers. Die Aufzeichnung der Frequenzkurve ist außerdem noch durch eine mechanische, maßstabrichtige Kopplung des Transportes des für die Aufzeichnung benutzten logarithmischen Papieres mit der Frequenzeinstellung weiterhin vereinfacht worden.

In der Abb. 6 wird als Beispiel die Frequenzkurve eines Tonabnehmer-Versuchsmusters gezeigt, das an sich noch sehr unvollkommen ist und erhebliche Störungen durch Resonanzen irgendwelcher Teile enthält. Trotz der Kompliziertheit der Kurve ist sie dennoch infolge der Zuverlässigkeit der obigen Meßmethode vollkommen reproduzierbar. Mißt man z. B. die Kurve mehrfach nacheinander, so zeigt sich stets, daß auch die kleinsten Unregelmäßigkeiten bei jeder Messung quantitativ genau wiederkehren. Es macht keine Schwierigkeiten, auch oberhalb von 10000 Hz noch genaue Messungen durchzuführen.

Die elektrische Entzerrung des Tonabnehmers

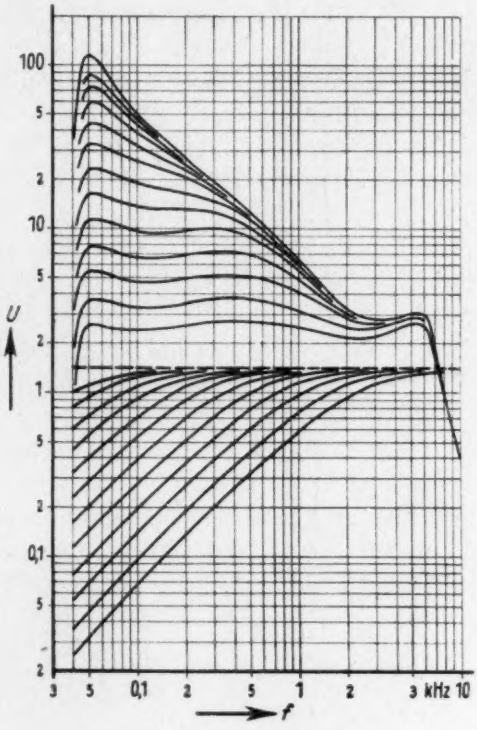
In Abb. 7 ist bei A die bei konstanter Amplitude gemessene Frequenzkurve eines durch richtige Bemessung und zweckmäßige Dämpfung ausgeglichenen Tonabnehmers von der in Abb. 2 angegebenen Bauweise wiedergegeben. Es sind noch zwei deutliche Resonanzstellen vorhanden, bei 6000 Hz eine Eigenschwingung des Schwingsystems und bei 50 Hz die Schüttelresonanz des Tonarmes. Diese beiden Überhöhungen der Frequenzkurve sind mit Absicht stehen gelassen worden. Im Prinzip könnte man sie noch mehr dämpfen oder außerhalb des benutzten Frequenzbereichs legen. Dies ist jedoch nicht so vorteilhaft, wie wenn man die Überhöhungen genau so beläßt, wie sie in der Kurve A in bezug auf Betrag und Frequenzlage angegeben sind. Hiermit wird ein ganz be-



U = Spannung an den Klemmen des Tonabnehmers in relativem Maß

Abb. 7. Herstellung einer gradlinigen Frequenzkurve unter Benutzung von gedämpften Resonanzen und eines Querwiderstandes

stimmter Zweck verfolgt. Es handelt sich nämlich dabei darum, mit möglichst einfachen Mitteln eine verzerrungsfreie Wiedergabe normaler Schallplatten zu ermöglichen. Es ist von vornherein klar, daß der auf die Amplituden und nicht auf die Geschwindigkeitsamplituden ansprechende Kristalltonabnehmer im Prinzip jedenfalls eine Entzerrung benötigt. Die Kurve *A* ist nun derart zugeschnitten, daß zu ihrer Entzerrung in höchst einfacher Weise ein Parallelwiderstand praktisch ausreicht. Dieser Widerstand besitzt, weil er keine Belastung auszuhalten hat, nur sehr kleine Abmessungen und kann im Tonarm fest eingebaut werden. Das Zustandekommen der Wirkung ist in Abb. 7 genauer erläutert. Wären die Schallplatten im ganzen Frequenzbereich mit konstanter Geschwindigkeitsamplitude geschnitten, was für den magnetischen Tonabnehmer der Idealfall wäre, so würde der ideale Kristalltonabnehmer in der Wiedergabe eine Frequenzkurve haben, die durch die unter 45° laufende Gerade I gegeben ist. Der wirkliche Tonabnehmer, mit der bei konstanter Amplitude gemessenen Frequenzkurve *A*, würde somit die Frequenzkurve *B* aufweisen, die eine Multiplikation, d. h. im logarithmischen Papier einfach eine Addition der Abweichungen der Kurven *A* und I vom geraden Verlauf dargestellt. Da aber die Schallplatten bei den tiefen Tönen mit einem Amplitudenabfall geschnitten werden, der der Kurve II entspricht, entsteht aus diesem Grunde aus der Kurve *B* die Kurve *C*, die immer noch einen starken Tiefenanstieg aufweist. Die Kurve *C* kommt praktisch tatsächlich zustande, wenn man den Tonabnehmer an einen Verstärker anschließt, dessen Eingangswiderstand hochohmig genug ist. Der Tiefenanstieg wird nun durch den Parallelwiderstand weggenommen. Da der Tonabnehmer im wesentlichen einen rein kapazitiven Generator bildet, so bewirkt ein Parallelwiderstand bei den tiefen Tönen eine der Frequenz proportionale Schwächung, während er bei hohen Tönen einflußlos ist. Die Kurve III in Abb. 7 zeigt, in welcher Weise die Tiefen durch einen Parallelwiderstand abgeschwächt werden. Änderungen des Betrages des Widerstandes bewirken lediglich Verschiebungen der Kurve III nach links oder nach rechts. Bei passender Bemessung des Widerstandes liegt die Kurve III an der gezeichneten Stelle. Durch Multiplikation der Zahlenwerte der Kurve III und der Kurve *C* erhalten wir die Frequenzkurve des Tonabnehmers mit Parallelwiderstand. Es ist dies die Kurve *D*, die einen praktisch gleichmäßigen Verlauf zwischen 50 Hz und 6500 Hz



U = Spannung an den Klemmen des Tonabnehmers in relativem Maß

Abb. 8. Hervorheben der Tiefen nach Wunsch regelbar durch einen veränderbaren Querwiderstand

aufweist. Noch höhere Töne als 6500 Hz sollen absichtlich abgeschwächt werden, weil sie bei dem heutigen Stand der Schallplattentechnik in den allermeisten Fällen kaum irgendeine musikalische Verbesserung, wohl aber eine starke Vermehrung des Rauschens bringen.

Ein besonderer Vorteil des Tonabnehmers ist es, daß man in einfacher Weise die Stärke der Wiedergabe der tiefen Töne regeln kann. Zu diesem Zwecke braucht man nur einen von etwa 30 kΩ bis 2 MΩ einstellbaren Par-

allelwiderstand (Rundfunk-Regelwiderstand) an Stelle eines konstanten Widerstandes zu verwenden und diesen Widerstand jeweils nach Wunsch, d. h. nach Maßgabe des subjektiven musikalischen Eindruckes einzustellen. In der Abb. 8 sind die bei verschiedenen Parallelwiderständen entstehenden wirksamen Frequenzkurven dargestellt (obere Kurvenschar). Die untere Kurvenschar zeigt den Tiefenverlust, wie er bei den verschiedenen Werten des Parallelwiderstandes zustande kommt. Tiefenabschwächung durch den Parallelwiderstand und Tiefenanhebung durch den auf die Amplituden ansprechenden Tonabnehmer ergänzen sich, wie man anschaulich erkennt, zu Frequenzkurven, die wegen ihres gleichmäßigen, nicht resonanzähnlichen Charakters eine zwar nicht wirklichkeitsgetreue, aber sicherlich niemals gehörmäßig unangenehme Wiedergabe vermitteln werden. In der Tat ist es erstaunlich, wie weit man praktisch mit dieser Art von Tiefenanhebung gehen kann, ohne auf Widerspruch bei unbefangenen Zuhörern zu stoßen. Im Gegenteil, ein starker, gleichmäßiger Tiefenanstieg wird praktisch durchweg als angenehm empfunden, und zwar nicht nur bei leiser Wiedergabe, wo dies durch die größere Unempfindlichkeit des Ohres für tiefe Töne erklärbar ist.

Einige mechanische und elektrische Merkmale des Tonabnehmers

Die Kraft, die der Tonabnehmer für die Auslenkung durch die Tonrillen benötigt, ist gering. Die Feder 3 in Abb. 2 drückt mit einem Buckel 3a gegen die Mitte der Kristallplatte, d. h. der Druck der Feder trägt nichts zur Richtkraft bei, weil der Druckpunkt in der Achse liegt. Es ist beim Auslenken somit nur die Torsionsrichtkraft der Kristallplatte zu überwinden, wobei sich bei den großen Amplituden (50 μ) ein Kraftbedarf von 4 g an der Nadelspitze ergibt. Auch die durch die Massenträgheit an der Nadelspitze hervorgerufenen Kräfte sind gering, da die schwingende Masse des Tonabnehmers, umgerechnet auf die Spitze der Nadel, nur 0,04 g beträgt.

Mit einem Andruck des Tonabnehmers auf die Platte von 5 g lassen sich bereits viele handelsübliche Schallplatten abspielen. Um in allen extremen Fällen eine einwandfreie Führung der Nadel zu haben, ist es praktisch erforderlich, mit einer ausreichenden Sicherheit zu arbeiten. Deshalb wird der Nadelandruck auf 18 g verstärkt.

Zur Dämpfung des Systems dient ein gummiähnlicher, nicht alternder Kunststoff, der nur geringe Temperaturabhängigkeit aufweist. In der Abb. 2 ist das Dämpfungsstück mit 12 bezeichnet. Es liegt (an beiden Seiten der Kristallplatte) einerseits auf dem Rand der Kristallplatte, andererseits auf einer in 1 mm Abstand parallel neben der Kristallplattenkante verlaufenden feststehenden Leiste auf, so daß durch die entstehende Walkarbeit die benötigte Dämpfung erzielt wird.

Die Kapazität des Tonabnehmers beträgt etwa 5000 pF. Infolgedessen spielt die Länge der Zuleitungen bis zum Verstärker in den normalen Fällen weiter keine Rolle. Durch Zuschalten der Kapazität der Zuleitungen wird zudem — genau so wie beim Kristallmikrophon — lediglich der Pegel heruntergesetzt, die Frequenzkurve bleibt erhalten.

Die Empfindlichkeit des Tonabnehmers ist sehr gut. Bei den größten auf den Schallplatten vorkommenden Amplituden erzeugt die Kristallplatte Spannungsamplituden von etwa $\pm$ 10 Volt, so daß u. U. ein Übersteuern des ersten Verstärkerrohres eintreten kann.

Der fertigungsmäßige Zusammenbau des Tonabnehmer-Schwingsystems ist ganz besonders einfach. Die Kristallplatte, die keine Kontaktfahnen besitzt, braucht nur eingelegt zu werden. Beim Aufsetzen der Andruckfeder rückt sich das System von selbst in die richtige, spannungsfreie neutrale Lage. Dies tut es übrigens sowieso jedesmal, wenn es durch senkrechten oder seitlichen Stoß aus seiner Lagerung herausfedert. Eine einwandfreie Kontrolle der Lagerung erhält man, wenn man auf die Nadelspitze von der Seite her stoßfrei ansteigende Kräfte in abwechselnd positiver und negativer Richtung wirken läßt und die dabei entstehenden Auslenkungen mißt. Die sich ergebende „Hysteresekurve" muß im praktisch benutzten Teil linear,

im ganzen symmetrisch, frei von sprunghaften Änderungen sein und darf keine nennenswerte Fläche einschließen.

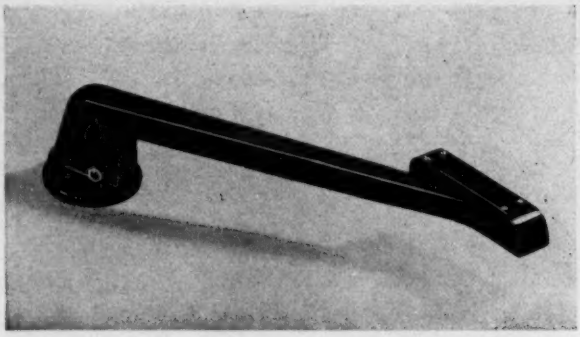


Abb. 9. Neuer Kristalltonabnehmer (Musterausführung)

Abb. 9 zeigt die Ansicht eines Labormusters des neuen Tonabnehmers. Da der Tonarm für einen Andruck von 18 g zu schwer ist, wurde er in der üblichen Weise durch eine eingebaute Blattfeder entlastet.

Kristall-Sägeeinrichtungen

Von Interesse sind noch die Kristall-Sägeeinrichtungen, mit Hilfe deren man aus Kristallstücken die dünnen langen Platten, die für den Tonabnehmer benötigt werden, herstellen kann. In Abb. 10 ist zunächst eine „Einfadensäge" zu sehen, mit der größere Kristallblöcke zerschnitten werden können. Das Zersägen geschieht mit Hilfe des bekannten Prinzips des nassen Fadens und ist somit eigentlich kein Sägen, sondern ein Lösen. Der Faden läuft hin- und hergehend über die beiden großen Rollen, die an der Maschine vorn zu sehen sind. Unten läuft der Faden durch ein Wasserbad, oben wird der zu zersägende Kristall, der mit Hilfe von geeigneten Paßstücken an dem ganz rechts befindlichen, in der Höhe verstellbaren Schwenkarm befestigt wird, gegen den Faden gedrückt. Die Maschine zersägt Blöcke bis zu 200 mm Schnittbreite. Sie gestattet, von großen Kristallstücken großflächige Platten von nur 0,15 mm Stärke abzuschneiden. Die Sägegeschwindigkeit beträgt je nach der Schnittbreite etwa 1 . . . 6 mm pro Minute.

In der Abb. 11 ist eine Laboratoriumsausführung der sogenannten Vielfach-Säge zu sehen, bei der über die mit *R* bezeichneten Rollen, die mit je 31 Rillen in Abständen von z. B. 0,55 mm versehen sind, 31 Fäden nach Art einer Gattersäge laufen, so daß mit einem Schnitt 30 Platten zugleich geschnitten werden können, deren Stärke bei einem Sägeschnittverlust von 0,3 mm 0,25 mm beträgt. Der zu zersägende Kristallblock *K* (es können gleichzeitig mehrere Blöcke geschnitten werden) ist an dem um *D* drehbaren Wagebalken *B*

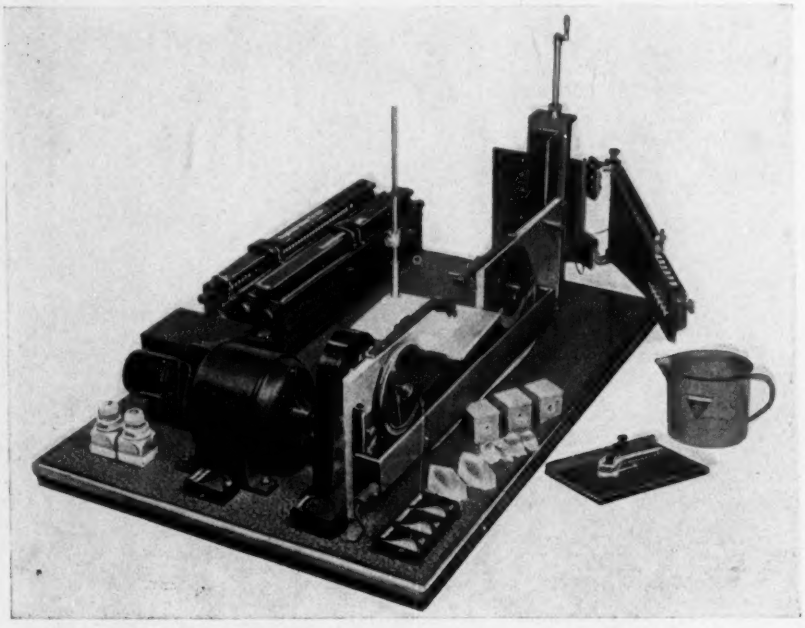
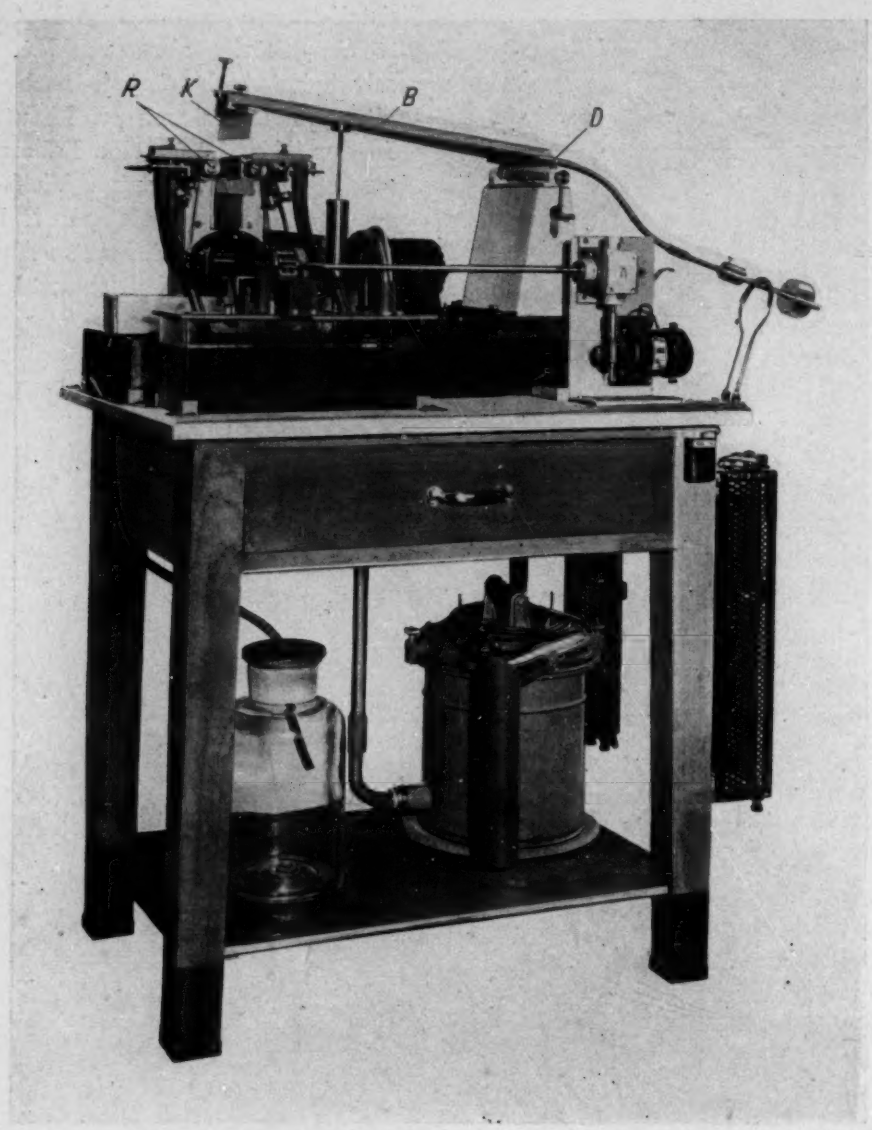


Abb. 10. Einfadensäge, zum winkelrichtigen Zerschneiden von großen Kristallblöcken

befestigt und wird mit geringem Andruck (Übergewicht) gegen die hin- und hergehenden Sägefäden gedrückt. Die Schnittgeschwindigkeit beträgt 2 mm pro Minute, d. h. die Maschine

liefert beispielsweise, wenn man einen einzigen Block zersägt, in 5 Minuten 30 Platten von je einem Quadratzentimeter Fläche. Die Platten werden durch eine besondere Einrichtung gratfrei abgesägt. Ihre Oberfläche ist so glatt, daß man durch einen größeren Stapel von Platten hindurch Druckschrift lesen kann. Als Demonstrationsobjekt für die Genauigkeit, mit der die Maschine arbeitet, wurde der in Abb. 12 dargestellte Kristall hergestellt. Durch zwei sich rechtwinklig kreuzende Vielfach-Schnitte, die tief in den Kristall hinein-, aber nicht gänzlich hindurchgehen, wurde der Kristall in 900 feine Säulen zerlegt. Von diesen vielen Säulen ist nicht eine einzige ausgebrochen.



R = Führungsrollen für 31 Fäden nebeneinander.
K = die zu zersägende Kristallplatte
B = Wagebalken, dessen Kippbewegung den Sägevorschub der Kristallplatte bewirkt
D = Drehpunkt des Wagebalkens

Abb. 11. Vielfachsäge, zum Herstellen von dünnen Kristallplatten. Die Maschine sägt nach Art einer Gattersäge 30 Platten gleichzeitig ab

Zusammenfassung

Es wird ein Kristalltonabnehmer beschrieben, bei dem die Kristallplatte durch besondere bauliche Maßnahmen unzerbrechlich eingelagert ist. Durch ähnliche Maßnahmen ist auch die Saphir-Abtastnadel vor dem Abbrechen geschützt, so daß die Kristallplatte, die Saphirspitze und die Schallplatte nicht beschädigt werden, wenn man den Tonabnehmer auf die Platte fallen läßt oder während des Spieles versehentlich anstößt.

Nadelrichtkraft und Auflagedruck des neuen Tonabnehmers sind besonders gering. Die mechanischen Eigenschwingungen des Systems sind derart abgestimmt, daß der Tonabnehmer mit einem einfachen Querwiderstand entzerrt werden bzw. auf Wunsch mit verstärkter Wiedergabe der tiefen Töne benutzt werden kann.

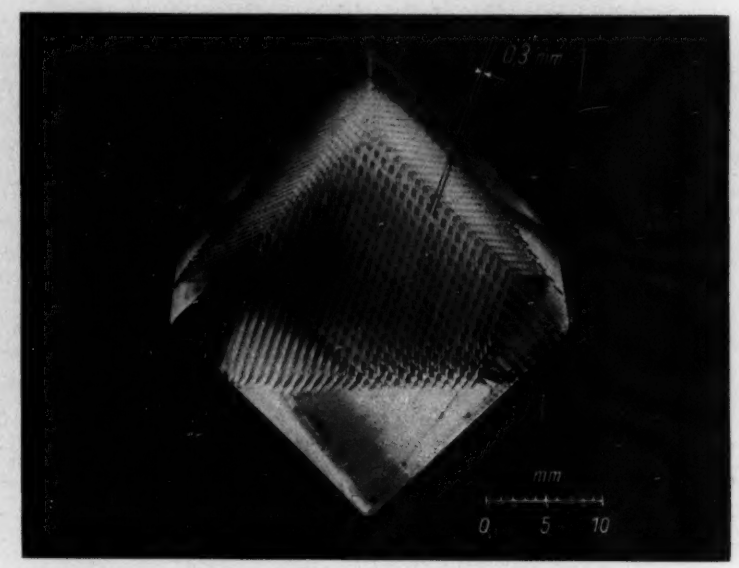


Abb. 12. Mit der Vielfachsäge bearbeiteter Kristallwürfel. Das sehr spröde Kristallmaterial wurde iu 900 (0,3 mm □) Säulen zerlegt

Eine besondere Meßeinrichtung für die Untersuchung von Kristalltonabnehmern sowie Sägeeinrichtungen für die Herstellung von Kristalltonabnehmerplatten werden beschrieben.

(Eingegangen am 4. Januar 1943.)

Zur Theorie der Beugung einer ebenen Schallwelle an der Kugel

Von **L. Schwarz**

Mitteilung der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V.
(Institut für instationäre Vorgänge)

(Mit 9 Textabbildungen)

Übersicht

Der Druck, der sich unter dem Einfluß einer ebenen Schallwelle auf der Oberfläche einer schallharten Kugel einstellt, kann nach längst bekannten Formeln von RAYLEIGH berechnet werden. Das komplexe Geschwindigkeitspotential, das Verhältnis der Druckamplituden von gebeugter und ungestörter Welle, sowie die Phasendifferenz zwischen den Drücken beider Wellen sind vertafelt für $\omega = 1, 2, \ldots 10$ und $\vartheta = 0°, 5°, 10°, \ldots 180°$. Dabei ist ϑ die geographische Breite auf der Kugel und ω das Verhältnis des Kugelumfangs zur Wellenlänge. Das berechnete Zahlenmaterial wird in 9 Bildern der Anschauung erschlossen und mit dem in der Literatur vorhandenen Zahlen- und Kurvenmaterial verglichen.

Gliederung

I. Einleitung. Stand des Problems.
II. Abriß der Theorie.
1. Formulierung des Beugungsproblems.

2. Lösungen der Wellengleichung in Kugelkoordinaten.
3. Die Lösung des Beugungsproblems.
III. Ergebnisse.
1. Zahlenrechnung.
2. Erläuterung der Ergebnisse.
3. Schrifttum.
4. Besprechung des Schrifttums.
IV. Zahlentafeln und Abbildungen.

I. Einleitung

Bei der Messung des Schalldrucks mit Hilfe eines Mikrophons muß beachtet werden, daß das Schallfeld durch den eingebrachten Empfänger wesentlich verzerrt wird. Es werde angenommen, daß die Membran eines Schalldruckmessers von einer ebenen Welle getroffen werde. Ist die Wellenlänge sehr groß im Vergleich zu den Abmessungen des Mikrophons, so wird das Schallfeld kaum beeinflußt; umgekehrt wird bei sehr kleiner Wellenlänge das Schallfeld zwar wesentlich verändert, läßt sich aber in der Nähe der Membran völlig übersehen. Die Membran wirkt dann nämlich wie eine unendlich ausgedehnte, reflektierende Wand und verdoppelt den Schalldruck.

Schon bei mittelgroßer Wellenlänge ist es jedoch unmöglich, die Verzerrung des Schallfeldes durch Beugung zu vermeiden. Um diesen Effekt korrigieren zu können, muß man dem Mikrophonkörper eine einfache geometrische Gestalt geben, damit die Wirkung der Beugung exakt berechenbar wird. BALLANTINE [8] hat deshalb vorgeschlagen, das Mikrophon in ein kugelförmiges Gehäuse einzubauen und den Schalldruck auf der Kugeloberfläche der Theorie der Beugung einer ebenen Schallwelle an einer schallharten Kugel zu entnehmen. Die Formeln dazu stammen bereits von RAYLEIGH [10], das vorhandene Zahlenmaterial, das großenteils auch von RAYLEIGH herrührt, reicht zu diesem Zweck jedoch nicht aus. (Eine Einschränkung auf frontalen Schalleinfall, wie sie BALLANTINE vorschlägt, ist nicht zweckmäßig, da es nicht immer möglich ist, die Einstellung des Mikrophons der Schallrichtung anzupassen.)

In der vorliegenden Arbeit ist deshalb auf Veranlassung von H. G. KÜSSNER das ganze Problem neu bearbeitet mit dem Ziel, umfassende Zahlentafeln zur Verfügung zu stellen.

Eine kurze Inhaltsangabe ist im folgenden in dem erweiterten Rahmen einer Übersicht über den gegenwärtigen Stand des Problems gegeben. In dieser Übersicht beschränken wir den Aufpunkt nicht auf die Kugeloberfläche.

Stand des Problems

Die exakte theoretische Behandlung der Beugung einer ebenen Schallwelle an einer schallharten Kugel geht auf RAYLEIGH [5], [10] zurück und ist von STENZEL [6] zum Abschluß gebracht worden. Zur praktischen Beherrschung des Problems ist die Kenntnis einer komplexen Funktion (oder zweier reellwertiger Funktionen) von 3 reellen Veränderlichen erforderlich. Diese Funktionen sind durch Reihen gegeben, zu deren Berechnung bei höherer Frequenz eine große Anzahl von Reihengliedern berücksichtigt werden muß. Eine Einsicht in ihre Wertverteilung ist also nur durch umfangreiche Rechnung zu gewinnen. Unser Bericht über den Stand des Problems besteht in einigen Angaben über die Vertafelung oder graphische Darstellung dieser Funktionen.

Wir müssen schon hier die wichtigsten Bezeichnungen festlegen. Der Radius der beugenden schallharten Kugel sei r_0, die Wellenlänge der ebenen Welle λ. Dann ist $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl; die dimensionslose Größe kr_0 werde mit ω bezeichnet. In der Theorie des schwingenden Tragflügels heißt eine ähnlich gebildete Größe „reduzierte Frequenz". Dieser Name sei auch hier vorgeschlagen. Die Schallgeschwindigkeit sei c; kc ist also die Kreisfrequenz der Welle.

Der der einfallenden Welle zugekehrte Kugelpunkt werde kurz als Nordpol bezeichnet. Das Problem ist rotationssymmetrisch bezüglich der Nord- und Südpol verbindenden Achse. Infolgedessen sind für den Aufpunkt nur die geographische Breite ϑ, die von 0° am Nordpol bis zu 180° am Südpol läuft, und der Abstand r vom Kugelmittelpunkt von Belang, nicht aber die geographische Länge. In die Formeln geht

übrigens r nur in der dimensionslosen Verbindung kr ein.

ω, kr und ϑ sind die 3 obengenannten Veränderlichen des Problems, wobei der Aufpunkt natürlich auf den Außenraum der Kugel zu beschränken ist, d. h. $kr \geqq kr_0 (= \omega)$. Als charakteristische Funktion kann das Geschwindigkeitspotential $\psi(\omega, kr, \vartheta) \cdot e^{ikct}$ des im Aufpunkt r, ϑ schwingenden Luftteilchen genommen werden. Doch dürften einer anschaulichen Deutung zuliebe statt ψ die folgenden beiden eng mit ψ verknüpften reellen Funktionen vorzuziehen sein: $\left|\frac{p}{p_0}\right|$, das Verhältnis der Schalldruckamplituden von gebeugter und ungestörter Welle, und φ, die Phasendifferenz der gebeugten gegenüber der ungestörten Welle.

Bisher sind 3 Sonderfälle bearbeitet: 1. Aufpunkt auf der Kugeloberfläche ($r = r_0$); 2. Aufpunkt ins Unendliche gerückt ($r = \infty$); 3. Aufpunkt im Innern des Schallfeldes, bei einem festen Wert der reduzierten Frequenz ($\omega = 2$).

Dem Sonderfall $r = r_0$ ist die vorliegende Arbeit gewidmet. In Abschnitt II ist zunächst, um dem Leser das Nachlesen im Schrifttum zu ersparen, eine Ableitung der bereits bekannten (vgl. [6], S. 104/5) Formel für das Geschwindigkeitspotential ψ bei beliebiger Lage des Aufpunktes vorausgeschickt. Nach dem in III, 1 geschilderten Verfahren sind dann sowohl ψ wie auch die mit ψ verknüpften Funktionen $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ berechnet für

$$(r = r_0), \quad \omega = 0, 1, 2 \ldots 10$$
$$\text{und } \vartheta = 0°, 5°, 10° \ldots 180°,$$

s. Zahlentafeln 1—5. Das bedeutet gegenüber der bisherigen Literatur, in der sich allerdings noch kleinere, hier nicht berücksichtigte Werte von ω finden, sowohl eine Vermehrung der ω-Werte wie eine feinere Unterteilung nach Breitenkreisen. Um dies Zahlenmaterial der Anschauung nahezubringen, sind $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ über ω und ϑ aufgetragen, die dabei abwechselnd als Abszisse und Kurvenparameter auftreten (s. die Abb. 2—9). In Abb. 1 ist für mehrere ω-Werte $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ als Radius über ϑ als Winkel aufgezeichnet. Außer den von uns berechneten Werten, die sämtlich $\omega \geqq 1$ betreffen, sind die auf RAYLEIGH [5] zurückgehenden Werte von ψ, $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ für $(r = r_0)$, $\omega = \frac{1}{2}$ und $\vartheta = 0°$, 90°, 180° in Zahlentafel 12 zusammengestellt. Dagegen sind nicht die wenigen Zahlwerte von geringerer Genauigkeit wiedergegeben, die BALLANTINE [8] für den Nordpol $(r = r_0)$, $\vartheta = 0$ und einige ω-Werte < 1 berechnet hat. Ebenso gehen wir hier auf frühere, weniger vollständige Darstellungen nicht ein, um so mehr, als auf sie in dem Abschnitt III, 3 und 4 über das Schrifttum hingewiesen wird.

Der Sonderfall $r = \infty$ ist von STENZEL behandelt worden, s. [11]. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind auch, teilweise in leicht abgeänderter Bezeichnung, in [6], S. 105/8 zu finden. STENZEL bestimmt den von ω und ϑ abhängigen

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ \frac{kr}{\omega} e^{ikr} \cdot [\psi - e^{ikr \cos \vartheta}] \right\},$$

den er den „Störfaktor "nennt und mit

$$\Re + \Im i = Z \cdot e^{iz}$$

bezeichnet. Dieser Ausdruck gibt im wesentlichen, d. h. bis auf einen nur von r abhängigen Faktor, die Verteilung des durch die beugende Kugel zusätzlich hervorgerufenen Störfeldes für großen Abstand r. An Zahlenmaterial und Kurven findet sich in [11] folgendes: 1. Für $\omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ sind $\Re$ und $\Im$ über ϑ aufgetragen (Abb. 5, 6); für dieselben ω-Werte ist Z als Radius über ϑ als Winkel dargestellt (Abb. 7—9). 2. Der Sonderfall $\vartheta = 0$ ist ausführlicher behandelt. Der Störfaktor $\Re + i\,\Im$, der in diesem Fall auch „Reflektionsfaktor" heißt, ist für $\omega = 0$ bis 10 im Schritt 0,2 tabuliert (Tafel 12) und als mit ω bezifferte Kurve in der GAUSSschen Ebene aufgezeichnet. Schließlich sind noch Z, $\Re$ und $\Im$ über ω aufgetragen (Abb. 3).

Damit sind gewissermaßen die Grenzen des Schallfeldes abgesteckt. Den ersten Vorstoß in das Innere des Schallfeldes unternimmt STENZEL in [6], S. 109—114. Um den Arbeitsaufwand in erträglichen Grenzen zu halten, spezialisiert er ω. Für $\omega = 2$ und $kr = 2, 3, \ldots 10$ gibt er Reihenkoeffizienten zur Ge-

winnung des zusätzlichen, durch die beugende Kugel hervorgerufenen Schallfeldes, S. 110/111. Mit deren Hilfe berechnet er nach der auf S. 113 angegebenen Gleichung $R + J\,i$, das (vom Vorzeichen abgesehen) als Geschwindigkeitspotential in unserer Bezeichnung

$$-\psi + e^{ikr\cos\vartheta},$$

lautet. R und J sind in den Abb. 101—104 über ϑ aufgetragen. Durch sie wird aber kein so unmittelbarer Eindruck vom physikalischen Geschehen vermittelt, wie durch die Darstellung von $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ in Abb. 105. Besonders anschaulich sind die Kurven konstanten Schalldrucks in Abb. 106.

Zusammenfassend läßt sich sagen: das Zahlen- und Kurvenmaterial für die Beugung einer ebenen Welle an der Kugel bedarf der Ergänzung, insbesondere ist eine Ausdehnung der letzten Untersuchungen von STENZEL auf größere ω-Werte wünschenswert. Es wäre dazu sehr förderlich, wenn man neue Darstellungen für das Geschwindigkeitspotential ψ fände, die mit geringerem Rechenaufwand zu Zahlenwerten führen würden.

II. Abriß der Theorie

1. Formulierung des Beugungsproblems

Wir geben zunächst die Grundgleichungen der Akustik an in dem geringen Umfang, in dem wir sie benötigen. Der Geschwindigkeitsvektor leite sich von einem Potential Φ her,

$$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\Phi, \tag{1}$$

das Potential genügt dabei der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\,\Delta\,\Phi = 0 \tag{2}$$

und sei in der Zeit harmonisch:

$$\Phi(x, y, z; t) = \psi(x, y, z)\,e^{ikct}. \tag{3}$$

Daraus erhält man die zeitlose Form der Wellengleichung

$$\Delta\,\Phi + k^2\psi = 0. \tag{4}$$

Der Schalldruck ist

$$p = \varrho\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{5}$$

also bei harmonischem Ansatz:

$$p = i\,\varrho\,k\,c\,\Phi = i\,\varrho\,k\,c\,e^{ikct}\cdot\psi. \tag{6}$$

Eine aus der Richtung der positiven z-Achse ankommende ebene Welle wird durch die Gleichung

$$\Phi = e^{ik(ct+z)} \quad \text{oder} \quad \psi = e^{ikz} \tag{7}$$

gegeben.

Der Schalldruck der ebenen Welle ist also

$$p_0 = i\,\varrho\,k\,c\,e^{ik(ct+z)}. \tag{8}$$

Wir merken hier noch an, daß mit Kugelkoordinaten r, φ, ϑ, eingeführt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{9}$$

die Beziehung gilt

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial(e^{ikr\cos\vartheta})}{\partial r} = i\,k\cos\vartheta\cdot e^{ikr\cos\vartheta}. \tag{10}$$

Nun sei eine schallharte Kugel vom Radius r_0 mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems gegeben. Wir suchen das Schallfeld, das durch Beugung der ebenen Welle an dieser schallharten Kugel entsteht; d. h. es wird ein Schallfeld gesucht, das sich für großen Abstand vom Kugelmittelpunkt wie die ebene Welle verhält, während auf der Kugeloberfläche die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors verschwindet (Bedingung für die „Schallhärte").

Wir superponieren das gesuchte Schallfeld aus der ebenen Welle (7) und einem Zusatzfeld Φ, das durch folgende Forderungen festgelegt ist:

1. Mit wachsendem Abstand vom Ursprung streben Φ und $\mathfrak{v}$ nach 0.

2. Auf der Kugeloberfläche ist die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors entgegengesetzt gleich der entsprechenden Größe der ebenen Welle, d. h. mit $k\,r_0 = \omega$ wird nach (10)

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=r_0} = -\,i\,k\cos\vartheta\,e^{i\omega\cos\vartheta}. \tag{11}$$

Um dies Randwertproblem zu lösen, müssen wir einiges über die Wellengleichung in Kugelkoordinaten vorausschicken.

2. Lösungen der Wellengleichung in Kugelkoordinaten

In die Wellengleichung in ihrer zeitlosen Form (4) führen wir Kugelkoordinaten r, φ, ϑ

ein[1]), um uns einen Vorrat an Lösungen zu verschaffen, die an die Gestalt des Rands in unserem Problem angepaßt sind. Es wird dann

$$(12)\quad \left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2r\frac{\partial\psi}{\partial r}+k^2r^2\psi\right)+\mathfrak{K}(\psi)=0\,,$$

wo zur Abkürzung

$$(13)\quad \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}+\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=\mathfrak{K}(\psi)$$

gesetzt ist.

Der Ansatz

$$(14)\quad \psi=\chi(r)\cdot Y(\varphi,\vartheta)$$

trennt, in (12) eingesetzt, die Veränderliche r von den beiden anderen, φ und ϑ. Er ergibt

$$(15)\quad \frac{r^2\chi''+2r\chi'+k^2r^2\chi}{\chi}=-\frac{\mathfrak{K}(Y)}{Y}\,.$$

Diese Größe ist unabhängig von φ und ϑ, wie die linke Seite der Gleichung, desgleichen unabhängig von r, wie die rechte Seite erweist, stellt also eine Konstante dar. Diese werde in der Form $n(n+1)$ angesetzt; die Zahl n werde fortan als Index für die zu dieser Konstantenwahl gehörigen Lösungen benutzt. Aus (15) folgt dann

$$(16)\quad r^2\chi_n''+2r\chi_n'+\left(k^2r^2-n(n+1)\right)\chi_n=0;$$

$$(17)\quad \mathfrak{K}(Y_n)+n(n+1)\,Y_n=0\,.$$

Die Lösung der Gleichung (16) für $k\neq 0$ erhalten wir durch eine leichte Umformung dieser Gleichung:

$$(18)\quad \frac{d^2(\sqrt{r}\,\chi_n)}{d(kr)^2}+\frac{1}{kr}\frac{d(\sqrt{r}\,\chi_n)}{d(kr)}+\left[1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{(kr)^2}\right](\sqrt{r}\,\chi_n)=0;$$

somit ist $\sqrt{r}\,\chi_n(r)$ eine Zylinderfunktion der Ordnung $n+\frac{1}{2}$ mit dem Argument kr:

$$(19)\quad \chi_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\,Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,.$$

Für $k=0$ besitzt (16) die Lösung r^n; ferner noch die Lösung r^{-n-1}, die aber in der Folge nicht weiter interessiert.

Die Funktion Y_n hängt nicht von k ab, da die Differentialgleichung (17) völlig frei von k ist. Um ihre Natur zu erkennen, können wir z. B. $k=0$ setzen. Dann ist $\psi=r^nY_n$ eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta\psi=0$, also nach einer bekannten Definition eine Kugelfunktion n-ter Ordnung und Y_n eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung.

Mit der angegebenen Bedeutung von $Z_{n+\frac{1}{2}}$ und Y_n lautet unsere Lösung der Wellengleichung

$$(20)\quad \psi_n=\frac{1}{\sqrt{r}}\,Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,Y_n(\vartheta,\varphi)\,.$$

Die Willkür der so gewonnenen Lösungen (20) schränken wir ein durch einige Forderungen.

1. ψ_n sei eine eindeutige Funktion im Raum, d. h. Y_n sei periodisch in φ mit der Periode 2π. Außerdem sei ψ_n in ϑ regulär für $\vartheta=0$ und π; das ist gewährleistet, wenn n ganzzahlig ist. Es genügt, $n=0,1,2\ldots$ zu nehmen, da n und $-n-1$ zur gleichen Lösung führen.

2. ψ_n sei rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse, d. h. Y_n sei unabhängig von φ. Daraus folgt, daß bis auf einen konstanten Faktor

$$(21)\quad Y_n=P_n(\cos\vartheta)$$

gilt, wo $P_n(x)$ das Legendresche Polynom n-ter Ordnung bedeutet.

3. Φ_n stelle eine ausstrahlende Welle dar, d. h. sein richtungsunabhängiger Faktor verhalte sich für große r wie $\frac{e^{ik(ct-r)}}{r}$, was nur zutrifft, wenn bis auf einen konstanten Faktor als Zylinderfunktion die Hankelsche Funktion zweiter Art gewählt wird.

$$(22)\quad Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)=H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,.$$

Somit ist

$$(23)\quad \psi_n=C_n\frac{1}{\sqrt{r}}\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n(\cos\vartheta)\,,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

3. Die Lösung des Beugungsproblems

Mit dieser Lösung (23) machen wir für das nach II, 1 gesuchte zusätzliche Schallfeld den Ansatz

$$(24)\quad \psi=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum C_n\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n(\cos\vartheta)\,.$$

[1]) Später ist φ eine Phasendifferenz. Eine Verwechslung ist kaum zu befürchten.

Durch formales Differenzieren ergibt sich

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=r_0} = \frac{1}{r_0\sqrt{r_0}} \sum C_n \left[n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega)\right] P_n(\cos\vartheta)\,, \tag{25}$$

wobei aus der Theorie der Zylinderfunktionen die bekannte Relation

$$Z'_\nu(\omega) = \frac{\nu}{\omega} Z_\nu(\omega) - Z_{\nu+1}(\omega) \tag{26}$$

zur Ableitung folgender Hilfsformel benutzt wird:

$$\left(\frac{Z_\nu(\omega)}{\sqrt{\omega}}\right)' = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} \cdot \left[\frac{1}{2}(2\nu - 1)\, Z_\nu(\omega) - \omega Z_{\nu+1}(\omega)\right]. \tag{27}$$

Nun soll

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=r_0} = -ik\cos\vartheta\, e^{i\omega\cos\vartheta} \tag{11}$$

gelten. Durch Vergleich von (25) und (11) können wir die Koeffizienten C_n bestimmen. Dazu muß $\cos\vartheta\, e^{i\omega\cos\vartheta}$ nach Kugelfunktionen $P_n(\cos\vartheta)$ entwickelt werden. Nun ist, vgl. etwa [7], S. 368, § 11. 5

$$e^{i\omega\cos\vartheta} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega)\, P_n(\cos\vartheta)\,. \tag{28}$$

Durch Differenzieren nach ω ergibt sich wegen (27) die Formel

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=r_0} = -k\, i\cos\vartheta\, e^{i\omega\cos\vartheta} = -\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\frac{k}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n \left[n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega J_{n+\frac{3}{2}}(\omega)\right] P_n(\cos\vartheta)\,. \tag{29}$$

Vergleich mit (25) ergibt

$$C_n = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{(2n+1)\, i^n \left[n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega J_{n+\frac{3}{2}}(\omega)\right]}{n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega)}$$

und somit ist das Zusatzfeld

$$\boxed{\psi = -\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n \frac{n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega J_{n+\frac{3}{2}}(\omega)}{n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega)} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_n(\cos\vartheta)\,.} \tag{30}$$

Mit dieser Reihe ist das Randwertproblem formal gelöst. Die Untersuchung der feineren mathematischen Fragen jedoch ist beiseitegelassen, so z. B. das Verhalten von ψ und grad ψ für $r \to \infty$ nach der ersten in II, 1 an ψ gestellten Forderung, die Frage nach der Konvergenz oder nach der Berechtigung, Reihen gliedweise zu differenzieren usw.

Fügen wir zum Zusatzfeld (30) das Feld der ebenen Welle (7), das wir uns nach Kugelfunktionen entwickelt denken — dazu ist nur in Formel (28) ω durch kr zu ersetzen —, so erhalten wir das Gesamtfeld

$$\boxed{\psi = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\, i^n}{n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,, & n J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega J_{n+\frac{3}{2}}(\omega) \\ H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,, & n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega) \end{vmatrix} P_n(\cos\vartheta)\,.} \tag{31}$$

Im folgenden soll ψ stets das Gesamtfeld bedeuten. Das Potential des Zusatzfeldes nach (30) ist dann $\psi - e^{ikr\cos\vartheta}$. (Um also den auf S. 93 erwähnten Störfaktor zu gewinnen, ist das Verhalten des Ausdrucks in (30) für $r \to \infty$ zu studieren.)

Zu einer anschaulichen Deutung der Ergebnisse ist es nützlich, das Gesamtfeld in Beziehung zum ungestörten Feld der ebenen Welle zu setzen. Bezeichnen wir wie früher mit ϕ

den zum Feld ψ gehörigen Schalldruck, mit p_0 den Schalldruck der ebenen Welle, so wird nach (6) und (8)

$$\frac{p}{p_0} = e^{-ikr\cos\vartheta}\psi . \tag{32}$$

Dann stellt also

$$|\psi| = \left|\frac{p}{p_0}\right| \tag{33}$$

das Verhältnis zwischen den Schalldruckamplituden von gebeugter und ungestörter Welle dar.

Der Winkel

$$\varphi = \operatorname{arc}\frac{p}{p_0} = \operatorname{arc}\psi - kr\cos\vartheta \tag{34}$$

ist natürlich nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, jedoch nach Festlegung seines Wertes in einem Punkt, als welchen wir den Nordpol der Kugel wählen können, völlig eindeutig durch stetige Fortsetzung in dem einfach zusammenhängenden Außenraum der Kugel. Er stellt die Phasenverschiebung zwischen den Drücken der gebeugten und der ungestörten Welle dar.

Das Schallfeld auf der Oberfläche der Kugel ergibt sich, wenn man r zu r_0 spezialisiert; kr wird dann zu ω. So ist wegen

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\omega), & J_{\nu+1}(\omega) \\ H^{(2)}_\nu(\omega), & H^{(2)}_{\nu+1}(\omega) \end{vmatrix} = \frac{2i}{\pi\omega}$$

das Potential des Gesamtfelds auf der Kugeloberfläche

$$\psi = \psi(\omega,\vartheta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,i^{n+1}}{n\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega\,H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega)}\cdot P_n(\cos\vartheta) . \tag{35}$$

$\left|\frac{p}{p_0}\right|$ bestimmt sich daraus nach (33) und φ nach der Formel

$$\varphi = \operatorname{arc}\psi - \omega\cos\vartheta . \tag{34'}$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Vertafelung der Funktionen $\Re\mathrm{e}\,\psi$ und $\Im\mathrm{m}\,\psi$, sowie die Vertafelung und graphische Darstellung von $|\psi| = \left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ, s. Abschnitt IV. Diese Ergebnisse sind in Abschnitt III, 2 erläutert; in III, 1 seien einige Worte über die Zahlenrechnung vorausgeschickt.

III. Ergebnisse

1. Zahlenrechnung[2])

Für

$$\omega = 0, 1, 2, \ldots 10 \quad \text{und}$$
$$\vartheta = 0°, 5°, \ldots 180°$$

soll das Geschwindigkeitspotential ψ der gebeugten Welle auf der Kugeloberfläche nach Formel (35) berechnet werden. Da hierzu HANKELsche Funktionen fortlaufender Ordnung notwendig sind, wollen wir uns zunächst deren Berechnung zuwenden.

Es liegt nahe, die Rekursionsformel der Zylinderfunktionen

$$Z_{\nu-1}(\omega) + Z_{\nu+1}(\omega) = \frac{2\nu}{\omega} Z_\nu(\omega) ,$$

heranzuziehen, die in diesem Fall lautet:

$$H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega) = \frac{2n+1}{\omega} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - H^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(\omega) .$$

Nun ist $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega)$ von der Form

$$H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\, e^{-i\omega}\,\frac{1}{\omega^n}\cdot[f_n(\omega) + i\,g_n(\omega)] , \tag{36}$$

wobei $f_n(\omega)$ und $g_n(\omega)$ Polynome in ω mit ganzzahligen Koeffizienten bedeuten. Auf sie überträgt sich ein rekursiver Zusammenhang,

$$\begin{cases} f_{n+1}(\omega) = (2n+1)\,f_n(\omega) - \omega^2 f_{n-1}(\omega) \\ g_{n+1}(\omega) = (2n+1)\,g_n(\omega) - \omega^2 g_{n-1}(\omega) . \end{cases} \tag{37}$$

Wegen

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\, e^{-i\omega}\, i ,$$
$$H^{(2)}_{\frac{3}{2}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\, e^{-i\omega}\left[1 + \frac{i}{\omega}\right]$$

sind die ersten Polynome

$$\begin{aligned} f_0(\omega) &= 0 , & f_1(\omega) &= -\omega , \\ g_0(\omega) &= 1 , & g_1(\omega) &= 1 . \end{aligned} \tag{38}$$

Es ist vorteilhaft, an Stelle der HANKELschen Funktionen bzw. ihrer reellen Komponenten $J_{n+\frac{1}{2}}$ und $N_{n+\frac{1}{2}}$ die Polynome f_n und g_n zu gebrauchen. Die Rechnung mit der Rekursionsformel führt nämlich nach wenigen Schritten zu einem merklichen Verlust an Genauigkeit;

[2]) Große Teile der Zahlenrechnung hat Frl. E. FRIEDRICHS ausgeführt.

man muß also mit recht genauen Anfangswerten in die Rechnung einsteigen. Die $f_n(\omega)$, $g_n(\omega)$ dagegen sind für ganzzahlige ω-Werte, weil ebenfalls ganzzahlig, völlig exakt angebbar. Bis $n = 15$ sind sie mit Hilfe der Rekursionsformel (37) exakt berechnet und in den Tabellen 7 und 8 zusammengestellt. Man kommt für die letzten Nummern zu Zahlen, deren Stellenzahl beim Rechnen auf einer Mercedes-Euklid-Rechenmaschine Mod. 38 MS gerade noch als erträglich bezeichnet werden darf. Zur Probe wurden die letzten beiden Formeln aus nachstehender Formeltafel benutzt. Damit sind offenbar auch alle f_n und g_n von kleinerer Nummer nachgeprüft.

Formeltafel für die Polynome $f_n(\omega)$ und $g_n(\omega)$

$$
\begin{aligned}
f_9(\omega) &= -\omega^9 + 990\,\omega^7 - 135135\,\omega^5 + 4729725\,\omega^3 \\
&\quad - 34459425\,\omega.\\
g_9(\omega) &= 45\,\omega^8 - 13860\,\omega^6 + 945945\,\omega^4 - 16216200\,\omega^2 \\
&\quad + 34459425.\\
f_{10}(\omega) &= -55\,\omega^9 + 25740\,\omega^7 - 2837835\,\omega^5 \\
&\quad + 91891800\,\omega^3 - 654729075\,\omega.\\
g_{10}(\omega) &= -\omega^{10} + 1485\,\omega^8 - 315315\,\omega^6 + 18918900\,\omega^4 \\
&\quad - 310134825\,\omega^2 + 654729075.\\
f_{14}(\omega) &= -105\,\omega^{13} + 185640\,\omega^{11} - 87297210\,\omega^9 \\
&\quad + 15713497800\,\omega^7 - 1159525191825\,\omega^5 \\
&\quad + 31623414322500\,\omega^3 - 213458046676875\,\omega.\\
g_{14}(\omega) &= -\omega^{14} + 5460\,\omega^{12} - 4594590\,\omega^{10} \\
&\quad + 1309458150\,\omega^8 - 151242416325\,\omega^6 \\
&\quad + 6957151150950\,\omega^4 \\
&\quad - 102776096548125\,\omega^2 + 213458046676875.\\
f_{15}(\omega) &= \omega^{15} - 7140\,\omega^{13} + 7936110\,\omega^{11} \\
&\quad - 3055402350\,\omega^9 + 496939367925\,\omega^7 \\
&\quad - 34785755754750\,\omega^5 + 924984868933125\,\omega^3 \\
&\quad - 6190283353629375\,\omega.\\
g_{15}(\omega) &= -120\,\omega^{14} + 278460\,\omega^{12} - 174594420\,\omega^{10} \\
&\quad + 43212118950\,\omega^8 - 4638100767300\,\omega^6 \\
&\quad + 205552193096250\,\omega^4 \\
&\quad - 2988412653476250\,\omega^2 \\
&\quad + 6190283353629375.
\end{aligned}
$$

Von $n = 14$ und 15 ausgehend, lassen sich nach der Rekursionsformel leicht auch höhere Nummern erreichen. Will man jedoch die Stellenzahl der Maschine nicht überschreiten, so wird man nicht mehr exakt weiterrechnen können. Der Vorrat an Genauigkeit wird dann sicher nicht vor $n = 30$ aufgebraucht sein, wahrscheinlich sogar noch weiter reichen. Wir mußten im ungünstigsten Fall, $\omega = 10$, nur bis $n = 22$ rechnen.

Führen wir nun in unsere Formel (35) die Polynome f_n, g_n ein, so wird

$$(39)\qquad e^{-i\omega}\psi = -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(A_n - iB_n)\,P_n(\cos\vartheta)$$

mit

$$(40)\qquad \begin{cases} A_n = A_n(\omega) = (2n+1)\,\dfrac{\omega^n}{\hat{f}_n^2+\hat{g}_n^2}\cdot\hat{f}_n\,, \\ B_n = B_n(\omega) = (2n+1)\,\dfrac{\omega^n}{\hat{f}_n^2+\hat{g}_n^2}\cdot\hat{g}_n\,, \end{cases}$$

wobei unter $\hat{f}_n$, $\hat{g}_n$ verstanden werden soll:

$$(41)\qquad \begin{cases} \hat{f}_n = n\,f_n(\omega) - f_{n+1}(\omega)\,, \\ \hat{g}_n = n\,g_n(\omega) - g_{n+1}(\omega)\,. \end{cases}$$

Die Koeffizienten A_n, B_n sind für jedes ω bis zu ausreichend hoher Nummer n berechnet und in Zahlentafel 6 angegeben. Sie dienen zur Auswertung der Formel (39) bzw. der folgenden beiden, in denen die Argumente ω und $\cos\vartheta$ rechts weggelassen sind:

$$(42)\qquad \begin{aligned} \Re e\,(e^{-i\omega}\psi) &= -B_0P_0 + A_1P_1 \\ &\quad + B_2P_2 - A_3P_3 - \cdots, \\ \Im m\,(e^{-i\omega}\psi) &= -A_0P_0 - B_1P_1 \\ &\quad + A_2P_2 + B_3P_3 - \cdots. \end{aligned}$$

(Die Vorzeichen wiederholen sich nach je 4 Gliedern.) Die $P_n(\cos\vartheta)$ für ϑ von 0° an im Schritt von 5° sind dem Anhang von A. Lodge der Rayleighschen Arbeit [10] entnommen, der bis $n = 20$ die Legendreschen Polynome für die verlangten ϑ-Werte enthält.

$\Re e\,(e^{-i\omega}\psi)$, $\Im m\,(e^{-i\omega}\psi)$ sind in Zahlentafel 9 und 10 tabuliert, die Summe ihrer Quadrate, $|\psi|^2$, in Zahlentafel 11. Obwohl nicht das angestrebte Ergebnis, sind die drei letzten Zahlentafeln aufgenommen, da Ausschnitte aus ihnen in der Literatur vorkommen. Eine leichte Umrechnung führt uns dann zu $\Re e\,\psi$, $\Im m\,\psi$ in Zahlentafel 4 und 5. Aus ihnen gewinnt man gemäß (33) und (34′) $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ in Zahlentafel 1 und φ in Bogen- und Gradmaß in Zahlentafel 2 und 3.

2. Erläuterung der Ergebnisse

Die Zahlentafeln 1—5 enthalten unsere eigentlichen Ergebnisse. An dieser Stelle sei die Bedeutung der vertafelten Funktionen wiederholt:

ψe^{ikct} = Geschwindigkeitspotential der an der schallharten Kugel mit dem Radius r_0 gebeugten ebenen Welle $e^{ik(ct+z)}$.

$\left|\frac{p}{p_0}\right|$ = Verhältnis der Druckamplituden von gebeugter und ungestörter ebener Welle, kurz: relative Schalldruckamplitude.

φ = Phasendifferenz zwischen den Drükken von gebeugter und ungestörter ebener Welle.

Der Aufpunkt ist hier auf die Kugeloberfläche beschränkt, so daß unter Beachtung der Rotationssymmetrie als einziger geometrischer Parameter übrigbleibt:

ϑ = geographische Breite, gemessen vom Nordpol ($\vartheta = 0$) bis zum Südpol ($\vartheta = 180°$).

$\psi = \psi(\omega, \vartheta)$ berechnet sich nach der Formel (35) von RAYLEIGH, $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ folgen daraus nach (33) und (34′). Während für

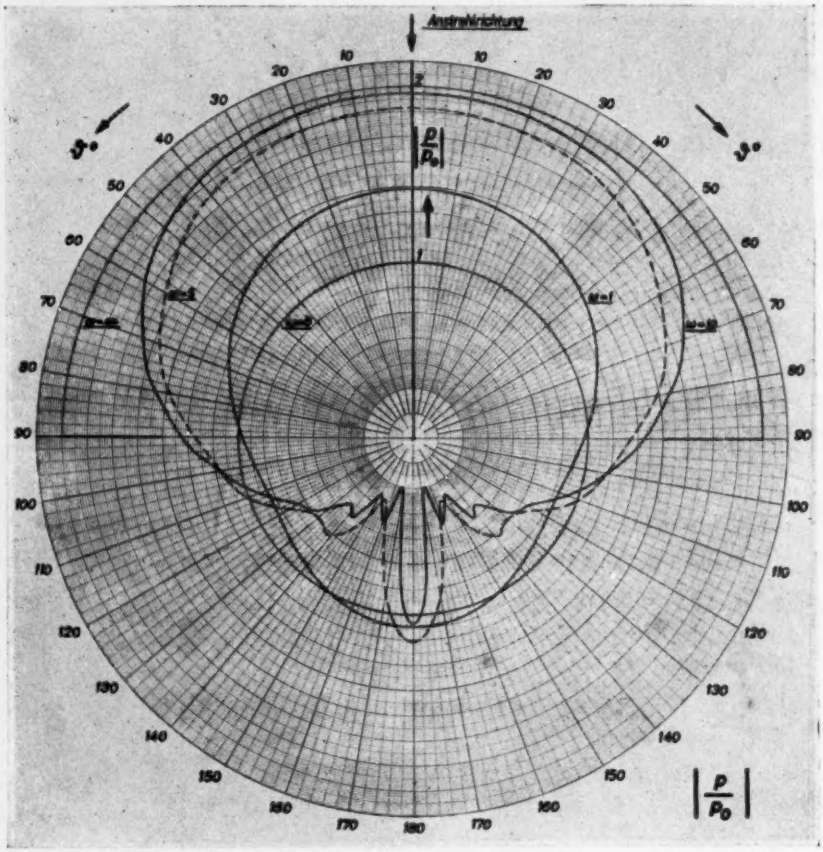


Abb. 1. Druckamplitudenverhältnis $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ zwischen gebeugter und ungestörter ebener Welle auf der Oberfläche der beugenden Kugel, aufgetragen in Polarkoordinaten über der geographischen Breite ϑ als Winkel, für mehrere ω-Werte. Das Maximum am Südpol bedeutet „optisch gesprochen" einen hellen Fleck auf der der Quelle abgewandten Kugelseite. Für $\omega = 0$, d. h. unendlich große Wellenlänge bzw. verschwindenden Kugelradius, gleichmäßige Wirkung für alle geographischen Breiten. Für $\omega \to \infty$, d. h. beim Übergang zur geometrischen Akustik (Optik) verschwinden die Wirkungen auf der abgewandten Kugelhälfte

Diesen Funktionen stehen als unabhängige Veränderliche gegenüber: die reduzierte Frequenz ω und der Aufpunkt, vertreten durch ϑ. Dabei ist

$\omega = k r_0 = 2\pi r_0/\lambda$ = Verhältnis des Umfangs eines größten Kugelkreises zur Wellenlänge = π-faches Verhältnis des Kugeldurchmessers zur Wellenlänge = reduzierte Frequenz.

numerische Rechnungen oftmals $\Re e\, \psi$ und $\Im m\, \psi$ den natürlichen Ausgangspunkt bilden, sind zur anschaulichen Erfassung und physikalischen Deutung $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ besser geeignet; sie sind deshalb in 9 Abbildungen dargestellt. Ihnen seien im folgenden einige qualitative Bemerkungen entnommen.

In Abb. 1 ist in einem Meridianschnitt der Kugel die relative Schalldruckamplitude

$\left|\frac{p}{p_0}\right|$ vom Mittelpunkt aus aufgetragen. Für $\omega \to 0$, d. h. bei gleichbleibendem Kugelradius für große Wellenlänge oder auch bei gleichbleibender Wellenlänge für verschwindende

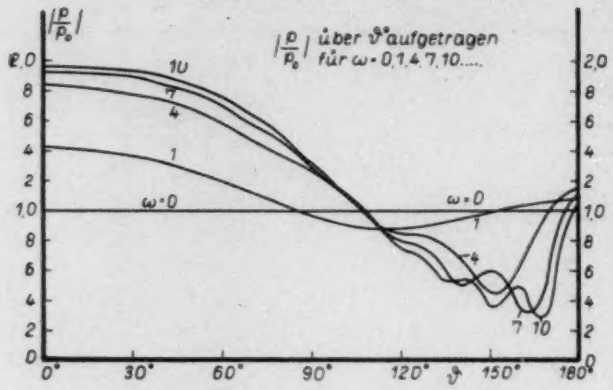


Abb. 2—5. Druckamplitudenverhältnis $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ zwischen gebeugter und ungestörter ebener Welle auf der Oberfläche der beugenden Kugel, abhängig von der geographischen Breite ϑ und dem Verhältnis ω des Kugelumfangs zur Wellenlänge

Abb. 2. $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ über ϑ aufgetragen für eine Auswahl von ω-Werten im gleichen Koordinatensystem

Kugelgröße, ist die beugende Kraft der Kugel gering. Für $\omega = 0$ ist demgemäß $\left|\frac{p}{p_0}\right| = 1$, die Kurve ist also ein Kreis. Mit wachsendem ω werden die Wirkungen auf der der Anstrahlung abgewandten Kugelhälfte geringer, und als typisches Beugungsphänomen zeigt sich am Südpol ein (optisch gesprochen) heller Fleck. Seine Ausdehnung nimmt ab, seine maximale Intensität im Südpol nimmt anfangs zu, später ab; vgl. am Südpol die Kurven $\omega = 1, 5, 10$, besser noch die Kurve $\vartheta = 180°$ in Abb. 4 und 5. Der helle Fleck ist nur das Hauptmaximum des Beugungsphänomens neben einer Reihe von Nebenmaxima, deren Anzahl mit ω wächst, s. Abb. 1 oder 3. Das mutmaßliche Verhalten für $\omega \to \infty$ ist durch die mit $\omega = \infty$ bezeichnete Kurve von Abb. 1 angedeutet: auf der nördlichen Halbkugel ein Halbkreis mit dem Radius 2, der beim Überschreiten des Äquators unstetig zu 0 auf der südlichen Halbkugel abfällt, also

$$(43)\quad \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{p}{p_0}\right| = \begin{cases} 2 \text{ für } & 0 \leq \vartheta < 90° \\ 0 \text{ für } & 90° < \vartheta < 180° . \end{cases}$$

Ohne diese Gleichung beweisen zu wollen, werde sie durch folgende Betrachtung verständlich gemacht. $\omega \to \infty$ bedeutet den Übergang zu verschwindender Wellenlänge, also, optisch gesprochen, zur geometrischen Optik. Auf der nördlichen Halbkugel wird jeder einfallende Strahl an einem als eben anzusehenden Oberflächenelement der Kugel reflektiert. Wir kön-

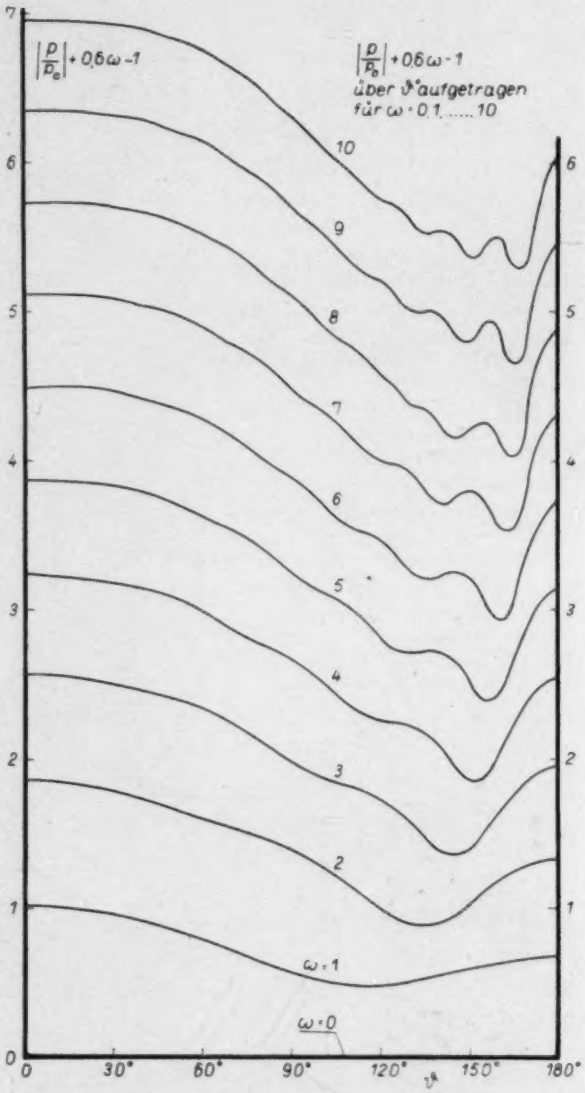
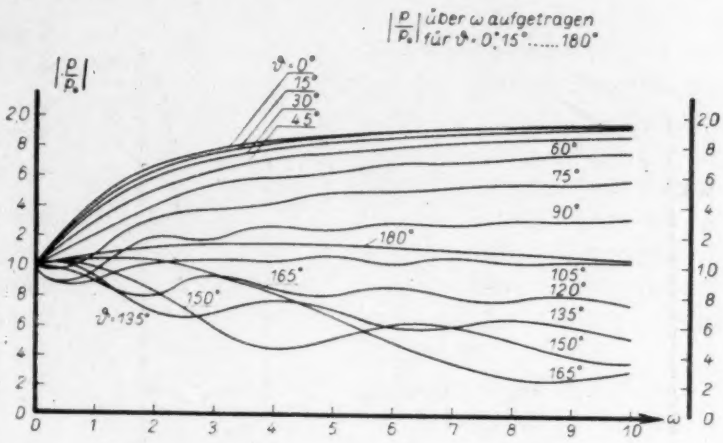


Abb. 3. $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ über ϑ aufgetragen für $\omega = 0, 1, \ldots, 10$, zu besserer Übersicht durch den zusätzlichen Summanden $0{,}6\,\omega - 1$ in Ordinatenrichtung gegeneinander verschoben

Abb. 4. $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ über ω aufgetragen für Breitenkreise im Abstand von je 15°, im gleichen Koordinatensystem

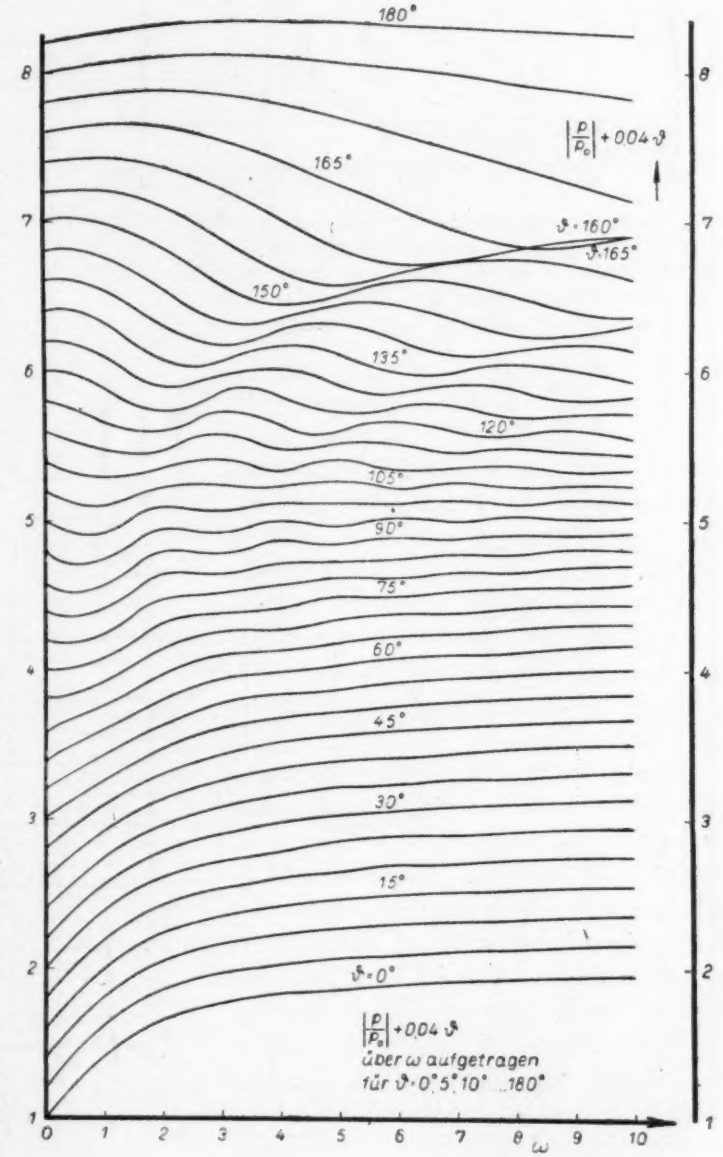


nen uns den Strahl als Normale einer ebenen Wellenfront denken, wenn die Wellenlänge im Vergleich zum Oberflächenelement klein ist. Da für sehr kleine Wellenlängen die Energieverteilung praktisch durch das Reflektionsgesetz geregelt wird — dem reflektierten Strahl also kaum Energie durch Beugung entzogen wird — ist nicht zu erwarten, daß Vorgänge an fremden Oberflächenelementen einen Beitrag zum Schalldruck liefern. $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ bestimmt sich also als relativer Schalldruck einer an einer Ebene reflektierten ebenen Welle für den betr. Einfallswinkel bei unbegrenzt wachsender Frequenz. Nun ist bekannt, daß bei Reflektion einer ebenen Welle an einer Ebene das Potential des Gesamtfelds am Ort der Ebene doppelt so groß ist wie das Potential der einfallenden Welle, vgl. etwa [2], S. 58, Gl. (56). Das Verhältnis der Schalldrücke wird also

$$\frac{p}{p_0} = 2, \tag{44}$$

wohlgemerkt unabhängig vom Einfallswinkel und für jede Wellenlänge, also auch für $\omega \to \infty$. Damit ist die erste Gleichung (43) verständlich geworden. Die zweite aber ist offenbar richtig, da für unendlich kleine Wellenlänge das Gebiet des geometrischen Schattens nicht durch Beugungseffekte erhellt wird. Aus Vorsicht ist in der Formel der Südpol ausgeschlossen; denn $\left|\frac{p}{p_0}\right|$

Abb. 5. $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ über ω aufgetragen für Breitenkreise im Abstand von je 5°; um Überschneidungen zu vermeiden, durch den zusätzlichen Summanden 0,04 ϑ in Ordinatenrichtung gegeneinander verschoben



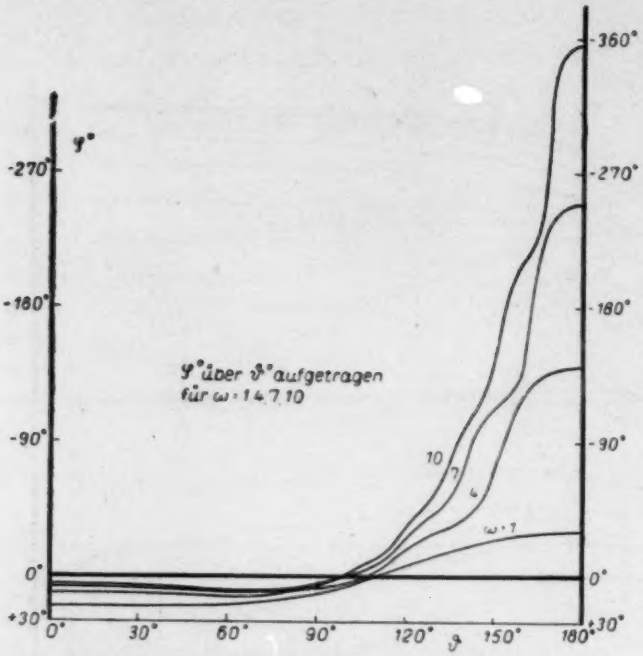


Abb. 6—9. Phasenverschiebung φ zwischen gebeugter und ungestörter ebener Welle auf der Oberfläche der beugenden Kugel, abhängig von der geographischen Breite ϑ und dem Verhältnis ω des Kugelumfangs zur Wellenlänge

Abb. 6. φ über ϑ aufgetragen für eine Auswahl von ω-Werten, im gleichen Koordinatensystem

nimmt zwar im Südpol schließlich für wachsendes ω ab, aber doch so langsam, daß nach Kurve $\vartheta = 180°$ in Abb. 4 oder 5 ein von 0 verschiedener Grenzwert durchaus möglich erscheint. Natürlich schließt dies keinen Widerspruch zur Erfahrung ein, da eine solche isolierte Unstetigkeit in einem Punkt physikalisch ohne Bedeutung ist.

Diese ganze Erörterung über Gleichung (43) ließ sich leider nicht durch einen exakten Grenzübergang an Hand der Formel (35) ersetzen. Führt man nämlich in ihr den Grenzübergang gliedweise durch, so gelangt man zu einem divergenten Ergebnis. Das ist nicht verwunderlich, da die Grenzfunktion unstetig, die Reihe also ungleichmäßig konvergent ist. Selbst ein konvergentes Ergebnis hätte noch einer eingehenden Begründung bedurft. Diese Ungleichmäßigkeit in der Konvergenz ist auch der Grund dafür, daß beim Rechnen nach Formel (35) eine mit ω anwachsende Gliederzahl, etwa $2\,\omega$, heranzuziehen ist.

Der relative Schalldruck $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ erreicht sein Maximum auf der Kugel, wenigstens bei genügend hoher Frequenz, nicht am Nordpol, wie man vermuten könnte. Man vergleiche dazu die Werte für $\omega = 10$ in

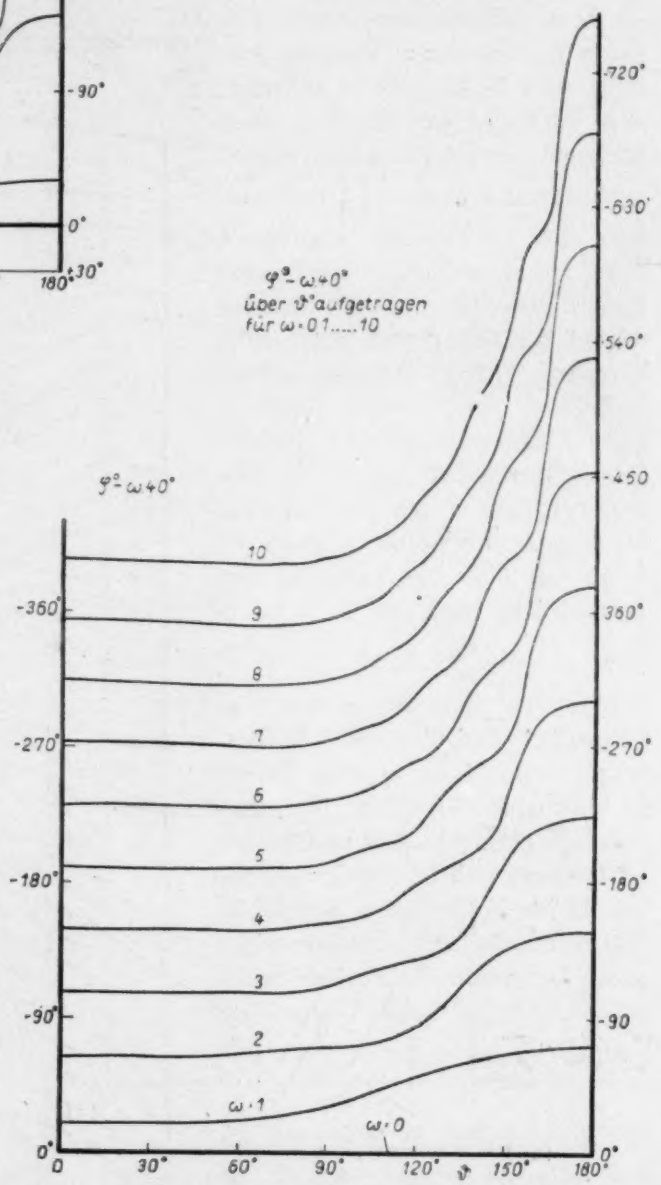


Abb. 7. φ über ϑ aufgetragen für $\omega = 0, 1, \ldots, 10$, zur erhöhten Übersicht durch den zusätzlichen Summanden $\omega \cdot 40°$ in Ordinatenrichtung auseinandergezogen

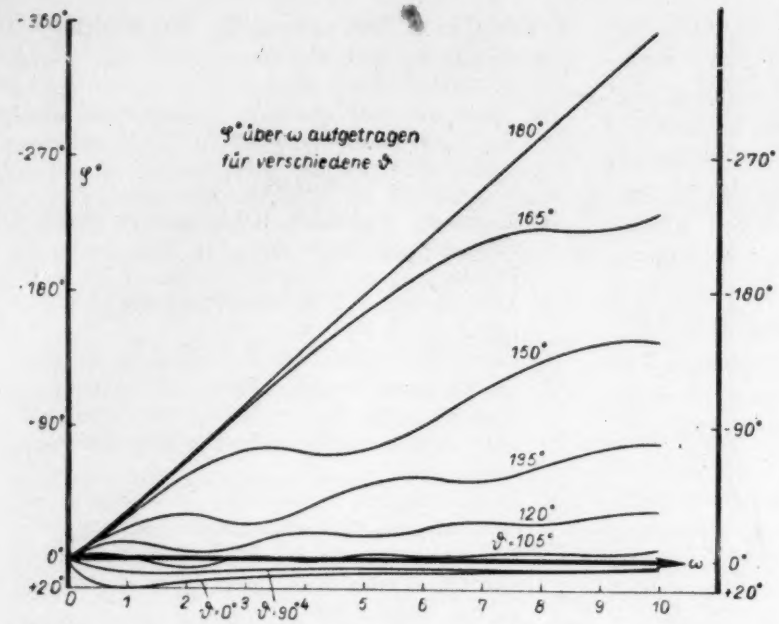


Abb. 8. φ über ω aufgetragen für den Nordpol und die Breitenkreise der südlichen Halbkugel im Abstand von je 15°, im gleichen Koordinatensystem

Zahlentafel 1, die mit den von RAYLEIGH [10] gerechneten Werten in Einklang stehen. Danach tritt am Nordpol in der Kurve $\omega = 10$ von Abb. 1 eine „Delle" auf, die allerdings viel zu klein ist, um in der Zeichnung bemerkbar zu werden. Physikalisch ist dieser Effekt wegen seiner Kleinheit ohne jede Bedeutung, immerhin könnte es sein, daß bei anders gearteten beugenden Oberflächen ähnliche Effekte von meßbarer Größenordnung auftreten.

Die Phasenverschiebung der gebeugten Welle gegenüber der ungestörten wird in Abb. 6—9 der Anschauung nahegebracht. Wir lesen aus Abb. 6 als Faustregel ab, daß auf der angestrahlten Kugelhälfte die Phase der gebeugten Welle um ein Geringes der ungestörten ebenen Welle gegenüber vorauseilt, während sie auf der im geometrischen Schatten liegenden Kugelhälfte beträchtliche Verzögerungen erleidet.

Im einzelnen bemerken wir: die Vorauseilung der Phase

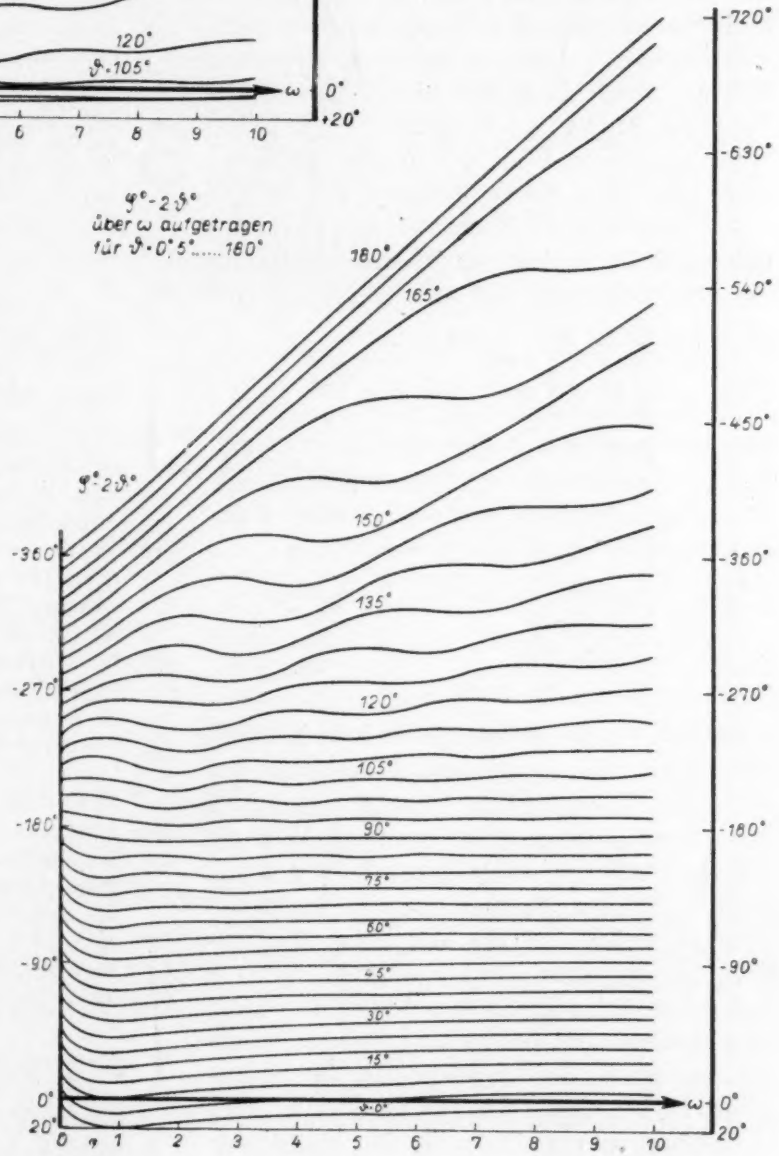


Abb. 9. φ über ω aufgetragen für Breitenkreise im Abstand von je 5°; um Überschneidungen zu vermeiden, in Ordinatenrichtung durch den Summanden $-2\vartheta°$ verschoben

ist keineswegs für den Nordpol am stärksten; der Breitenkreis mit der größten Phase wechselt mit der Schallfrequenz, für kleine ω liegt er nahe am Nordpol, für größeres ω rückt er mehr dem Äquator zu, vgl. etwa in Abb. 7 die Kurve $\omega = 7$ (man verbinde die Marken „— 270°" auf beiden senkrechten Achsen rechts und links mit einer Geraden). Für kleine ω (etwa $= 1$) ist dies Maximum so wenig ausgeprägt, daß man die Zahlentafel 3 zu Hilfe nehmen muß, um seine Lage zu erkennen. Ungefähr 10° bis 15° südlich des Äquators wechselt die Phasenverschiebung ihr Vorzeichen; mit wachsendem ω verschiebt sich der Breitenkreis verschwindender Phasendifferenz gegen den Äquator. Auf der südlichen Halbkugel fällt am meisten auf, daß die Phasenverschiebung am Südpol in einem breiten Frequenzbereich von $\omega = 1$ bis $\omega = 10$ fast linear ansteigt, vgl. Abb. 8 oder 9, Kurve $\vartheta = 180°$.

Das mutmaßliche Verhalten der Phase bei unbeschränkt wachsender Frequenz folgt für die nördliche Halbkugel aus Gleichung (44), da φ der Arcus von $\frac{p}{p_0}$ ist:

$$\lim_{\omega \to \infty} \varphi = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < 90° . \tag{45}$$

Die Existenz eines solchen Grenzwerts nördlich des Äquators ist nach Abb. 9 einleuchtend. Hinsichtlich der Phase auf der südlichen Halbkugel möchte man $\lim_{\omega \to \infty} \varphi = \infty$ für $90° < \vartheta \leq 180°$ vermuten, denn der Wegunterschied zwischen gebeugter und ungestörter ebener Welle, in Wellenlängen gemessen, wächst unbegrenzt, wenn die Wellenlänge nach 0 geht.

Zu Abb. 8 und 9 sei bemerkt, daß der Kurvenverlauf zwischen $\omega = 0$ und 1 durch die berechneten Kurvenpunkte für $\omega = 0$, 1 und 2 nur ungenau bestimmt ist, wenigstens für die Kurven nördlicher Breite $\vartheta < 90°$. Wir haben deshalb für den Nordpol in dem Frequenzintervall $0 \leq \omega < 1$ die Werte bei Ballantine [8] zugrunde gelegt, während für die anderen ϑ keine Zahlwerte verfügbar waren. Man beachte, daß der steile Abfall bei $\omega = 0$ bei der etwas dick gezeichneten Ordinatenachse leicht einen falschen Eindruck vom Kurvenbeginn vermittelt: z. B. gehört zur Kurve $\vartheta = 0°$ bei $\omega = 0$ die Phasendifferenz $\varphi = 0°$ bzw. $\varphi - 2\vartheta = 0°$.

3. *Schrifttum*

Bücher

[1] Hermann Backhaus, Schwingungen räumlich ausgedehnter Kontinua, in: Handbuch der Physik, hrsg. von Geiger und Scheel, Bd. VIII: Akustik, red. von F. Trendelenburg. Berlin 1927.

[2] Georg Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik. 3. Aufl. Leipzig 1939.

[3] Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Aut. deutsche Ausgabe von E. Helly. Leipzig/Berlin 1931.

[4] Erwin Meyer, Akustische Meßtechnik, in: Handbuch der Experimentalphysik, hrsg. von Wien und Harms, Bd. 17, 2. Teil: Technische Akustik, Erster Teil, hrsg. von E. Waetzmann. Leipzig 1934.

[5] Baron Rayleigh (J. W. Strutt), Die Theorie des Schalles. Aut. deutsche Ausgabe von Fr. Neesen. 2 Bände. Braunschweig 1880.

[6] Heinrich Stenzel, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen. Berlin 1939.

[7] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922.

Zeitschriftenaufsätze

[8] Stuart Ballantine, Effect of diffraction around the microphone in sound measurements. The Physical Review, Vol. 32, 2. Series, July—December 1928, S. 988—992.

[9] H. C. Harrison und P. B. Flanders, An efficient miniature condenser microphone system. Bell System techn. J. 11 (1932), S. 451—461.

[10] Lord Rayleigh, On the acoustic shadow of a sphere. With an appendix, giving the values of Legendre's Functions from P_0 to P_{20} at intervals of 5 degrees, by A. Lodge. Philos. Trans. Roy. Soc. London (A) 203 (1904), S. 87—120.

[11] Heinrich Stenzel, Über die von einer starren Kugel hervorgerufene Störung des Schallfeldes. Elektr. Nachr.-Techn. 15 (1938), S. 71 bis 78.

[12] Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. (1914), S. 88—102.

[13] Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. (1922), S. 264—270.

[14] Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. (1916), S. 98—107.

4. *Besprechung des Schrifttums*

Hinsichtlich der Theorie vergleiche man Rayleigh [5], S. 323—355 oder [10] und Stenzel [6],

S. 104/05 und u. U. S. 106—114. Man beachte: Wegen des Reziprozitätsgesetzes der Beugungstheorie dürfen (grob gesagt) Quelle und Aufpunkt vertauscht werden. Danach ist mit dem vorliegenden Problem: Aufpunkt auf der Kugel und Quelle im Unendlichen, die in [10] behandelte Frage gleichwertig: wie groß ist der Schalldruck, den eine im Nordpol einer schallharten Kugel befindliche Schallquelle im Unendlichen hervorruft?

Kurvenmaterial findet man in:

[1], S. 127, Abb. 6: $\left|\frac{p}{p_0}\right|^2$ in Polarkoordinaten über dem Winkel ϑ aufgetragen für $\omega = 2$ und 10.

[10] S. 89, Abb. 1: $\left|\frac{p}{p_0}\right|^2$ (in rechtwinkligen Koordinaten) über ϑ aufgetragen für $\omega = 2$ und 10.

[6], S. 113, Abb. 105, oberste Kurve ($kr = 2$): $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ über ϑ aufgetragen für $\omega = 2$. Die anderen Kurven dieser Abbildung behandeln den Druckverlauf außerhalb der Kugel. Die Abb. 101—104 sind ein Beispiel dafür, wie wenig übersichtlich die Kurven werden, wenn man ein komplexes Potential nach Real- und Imaginärteil aufspaltet, anstatt physikalisch sinngemäß absoluten Betrag und Arcus zu betrachten. Ähnliche Erfahrungen haben wir mit $\Re e\, \psi$ und $\Im m\, \psi$ gemacht, deren graphische Darstellung deshalb in dieser Arbeit unterblieben ist.

[4], S. 91, Abb. 8: $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ über einer logarithmischen Frequenzskala für den Nordpol $\vartheta = 0$. Die den verschiedenen Kugeldurchmessern entprechenden Kurven gehen durch Verschiebung längs der Frequenzachse aus einer von ihnen hervor; wählt man statt der Frequenz die dimensionslose Größe ω, so hat man natürlich nur eine Kurve.

[8], S. 992, Abb. 2: $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ (im Bogenmaß) über einer logarithmischen Frequenzskala für den Nordpol $\vartheta = 0$; vgl. die Bemerkung zu [4].

[9], S. 452, Abb. 1: $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ in db, d. h. $20 \log_{10} \left|\frac{p}{p_0}\right|$ über logarithmischer $\frac{\omega}{\pi}$-Achse aufgetragen für ϑ von 0° bis 180° im Schritt 22,5°; also abgesehen von der logarithmischen Verzerrung der Abszissenachse und dem größeren Parameterschritt (22,5°) unsere Abb. 4.

Zahlenmaterial findet man in:

[5], S. 292: $\frac{1}{2}\psi e^{-i\omega} = F + iG$ (in Rayleighscher Bezeichnung), sowie $\frac{1}{4}\left|\frac{p}{p_0}\right|^2 = F^2 + G^2$ für $\omega = \frac{1}{2}$, 1 und $\vartheta = 0°$, 180°, 90° sechsstellig; für $\omega = 2$ und dieselben ϑ fünf- bzw. vierstellig.

[10], S. 87: Die Werte von $\frac{1}{4}\left|\frac{p}{p_0}\right|^2 = F^2 + G^2$ aus [5] wieder abgedruckt.

[10], S. 89: Für $\omega = 2$ und $\vartheta = 0°$ bis 180° im Schritt von 15° vierstellig $\frac{1}{2}\psi e^{-i\omega} = F + iG$ und $\frac{1}{4}\left|\frac{p}{p_0}\right|^2 = F^2 + G^2$, sowie dreistellig $\left|\frac{p}{p_0}\right|^2 = 4(F^2 + G^2)$.

[10], S. 95: Für $\omega = 10$ und $\vartheta = 0°$ bis 180° im Schritt von 15°, jedoch zusätzlich für $\vartheta = 5°$, 10°, 170° und 175°, sind fünfstellig vertafelt

$$-\psi = 2(F + iG) \text{ und } \left|\frac{p}{p_0}\right|^2 = 4(F^2 + G^2).$$

Man beachte, daß also $F + iG$ hier in anderer Bedeutung gebraucht wird als in den einleitenden Bemerkungen und Tabellen derselben Abhandlung auf S. 87—89, sowie in der früheren Publikation [5].

Nachprüfung an Hand unserer Zahlwerte ergibt sehr gute Übereinstimmung für $\omega = 1$ (unsere Zahlwerte sind auch auf 6 Stellen gerechnet worden), gute Übereinstimmung für $\omega = 10$, mäßige für $\omega = 2$.

[10], S. 92 und S. 94, einige Hilfsgrößen für $\omega = 10$ tabuliert:

$$\begin{cases} \omega^{n+1}\chi_n(\omega) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}\omega}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega), \\ D_n = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}\omega}\left[n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - \omega H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(\omega)\right] \end{cases}$$

und $i^n(2n+1)D_n^{-1}$. Diese letzte Größe ist in guter Übereinstimmung mit unseren A_n, B_n nach der Beziehung:

$$i^n(2n+1)D_n^{-1} = i^{n+1}(A_n - iB_n)e^{i\omega}.$$

$\omega^{n+1}\chi_n(\omega)$ erweist sich mit geringen Abweichungen in den letzten Stellen als korrekt nach [12], wo man es unter der Bezeichnung $C_n(\omega) - iS_n(\omega)$ findet.

Schließlich sei noch erwähnt, daß Rayleigh [10] die einzige Arbeit ist, die sich um eine exakte Fehlerabschätzung bemüht.

[8], S. 991, Table I: dreistellige Werte von ψ, $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ und φ im Bogenmaß [„Angle ψ (radians")] am Nordpol $\vartheta = 0$ für einige ω. Die Werte von ψ in der 2. Spalte sind teilweise falsch, statt ψ ist $\psi e^{-i\omega}$ für $\omega = \frac{1}{2}$ und 2, und $-\psi$ für $\omega = 10$ angegeben. Der offensichtlich falsche Wert von φ für $\omega = 10$ (und selbstverständlich $\vartheta = 0°$), den auch Ballantine bereits angezweifelt hat, erklärt sich aus der oben erwähnten doppelten Bedeutung von $F + iG$ in [10]. Soweit die Zahlwerte für uns nachprüfbar waren, also für $\omega \geq 1$ nach eigenen und für $\omega = \frac{1}{2}$ nach Rayleighs Zahlwerten aus [5] bzw. [10], erwies sich die Genauigkeit als unterschiedlich gut.

[6], S. 110: Für $\omega = 2$, $\vartheta = 0$ sind $-\psi$ und $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ unter den Bezeichnungen $\sum_1 + \sum_2 - e^{ikr}$ und $|\sum_1 + \sum_2 - e^{ikr}|$ für $kr = 2$ angegeben. (e^{-ikr} ist ein Druckfehler!) STENZEL berechnet nicht das Gesamtfeld durch Reihen, sondern das Zusatzfeld, da er so für einen Aufpunkt in einiger Entfernung von der Kugel schnellere Konvergenz erzielt, und fügt dann erst das ungestörte Feld hinzu. Demgemäß ist bei ihm

$$-\sum [A_n (kr) + i B_n (kr)] P_n (\cos\vartheta)$$

das Potential ψ des Zusatzfelds nach unserer Formel (30). Liegt der Aufpunkt auf der Kugeloberfläche, so bringt diese Rechenanordnung jedoch keinen Vorteil. Es sei deshalb darauf verzichtet, den etwas komplizierten Zusammenhang der A_n, B_n in der Spalte $kr = 2$ bei STENZEL mit unseren A_n, B_n für $\omega = 2$ näher anzugeben.

Zur Ergänzung unserer Zahlentafeln vermerken wir die auf unsere Bezeichnungen umgerechneten Zahlwerte für $\omega = \frac{1}{2}$, $\vartheta = 0°$, 90° und 180°, nach den RAYLEIGHschen Angaben in [5], in der folgenden

Zahlentafel 12

Zahlwerte nach RAYLEIGH [5] für $\omega = \frac{1}{2}$; $\vartheta = 0°$, 90°, 180°

Ergänzung zu Zahlentafel Nr.	$\omega = \frac{1}{2}$		
	$\vartheta = 0°$	90°	180°
1. $\left\|\frac{p}{p_0}\right\|$	1,08497	0,96333	1,01927
2. φ rad	0,27904	0,11761	— 0,25319
3. $\varphi°$	15,988	6,738	— 14,507
4. $\Re\mathrm{e}\,\psi$	0,77206	0,96278	0,74356
5. $\Im\mathrm{m}\,\psi$	0,76230	0,03248	— 0,69716
9. $\Re\mathrm{e}\,\psi e^{-i\omega}$	1,04301	0,86049	0,31830
10. $\Im\mathrm{m}\,\psi e^{-i\omega}$	0,29883	— 0,43308	— 0,96830
11. $\left\|\frac{p}{p_0}\right\|^2$	1,17716	0,92800	1,03892

Tafeln BESSELscher und verwandter Funktionen halbganzer Ordnung

[7], S. 740—743, Table V: $J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x)$ sechsstellig für $n = 0, 1 \ldots 6$ und $x = 1, 2, \ldots 50$; $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ sechsstellig für $n = 7, 8, \ldots 18$ und $x = 1, 2, \ldots 20$.

Statt $J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x)$ findet man in der Literatur unter dem Namen RICCATI-BESSELsche Funktionen oftmals

$$S_n (x) = \sqrt{\frac{\pi}{2} x}\, J_{n+\frac{1}{2}} (x),$$

$$C_n (x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2} x}\, J_{-(n+\frac{1}{2})} (x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2} x}\, N_{n+\frac{1}{2}} (x).$$

Sie sind mit guter Genauigkeit tabuliert in:

[12] für $x = 1, 2, \ldots 10$

[13] für $x = 0{,}1; 0{,}2; \ldots 0{,}9$

[14] für $x = 1{,}1; 1{,}2; \ldots 1{,}9$

n scheint dabei durch $S_n (x) \geq 10^{-7}$ beschränkt zu sein. Die Werte sind entweder siebenstellig (d. h. sieben Dezimalen nach dem Komma) oder aber, bei größeren Zahlen, wenigstens mit 7 Ziffern angegeben. Nützlich sind außerdem die Werte von $C_n^2 (x) + S_n^2 (x)$. In [11], S. 73—74, Tafel 1—10 sind $C_n (x)$ und $S_n (x)$ mit geringerer Genauigkeit, größtenteils vierstellig, vertafelt für $x = 2{,}2$ bis 9,8 im Schritt 0,2 und die nicht negativen $n < 5 + x$ bzw. $6 + x$; außerdem für $x = 20$, $n \leq 30$ und $x = 40$, $n \leq 50$. Die Werte für ganzzahlige x, die man in [12] findet, sind weggelassen.

Zusatz bei der Korrektur

Herr Prof. E. MEYER macht mich noch auf folgende Arbeit aufmerksam:

[15] G. G. MULLER, R. BLACK und T. E. DAVIS, The diffraction produced by cylindrical and cubical obstacles and by circular and square plates. Journ. Ac. Soc. Am. Bd. 10 (1938), S. 6—13.

Diese Verfasser behandeln nebenbei auch die Beugung an der Kugel und zeigen als Ergebnis ihrer Näherungsrechnung in einem kleinen Schaubild $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ in db, also $20 \log_{10} \left|\frac{p}{p_0}\right|$, über logarithmischer $\frac{\omega}{\pi}$-Achse von 0° bis 180° im Schritt von 30°; vgl. die Besprechung von [9].

IV. Zahlentafeln

(siehe S. 107—117)

(Eingegangen am 16. Dezember 1942.)

Zahlentafel 1. $\left|\frac{p}{p_0}\right|$

Für $\omega = 0$: $\left|\frac{p}{p_0}\right| = 1$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	1,41840	1,66096	1,77436	1,83609	1,87392	1,89998	1,91921	1,93441	1,94682	1,95705
5°	1,41685	1,65882	1,77215	1,83416	1,87254	1,89917	1,91898	1,93460	1,94716	1,95727
10°	1,41222	1,65242	1,76557	1,82851	1,86856	1,89688	1,91821	1,93472	1,94741	1,95691
15°	1,40448	1,64176	1,75488	1,81960	1,86243	1,89333	1,91645	1,93348	1,94556	1,95387
20°	1,39361	1,62691	1,74041	1,80807	1,85462	1,88831	1,91238	1,92871	1,93943	1,94685
25°	1,37957	1,60801	1,72269	1,79461	1,84517	1,88060	1,90384	1,91844	1,92851	1,93723
30°	1,36235	1,58531	1,70242	1,77958	1,83323	1,86801	1,88884	1,90269	1,91503	1,92740
35°	1,34194	1,55920	1,68029	1,76271	1,81685	1,84827	1,86737	1,88408	1,90130	1,91601
40°	1,31838	1,53024	1,65679	1,74278	1,79347	1,82073	1,84208	1,86508	1,88511	1,89755
45°	1,29173	1,49918	1,63205	1,71766	1,76127	1,78745	1,81611	1,84349	1,86023	1,87025
50°	1,26213	1,46683	1,60542	1,68487	1,72067	1,75231	1,78867	1,81263	1,82490	1,84007
55°	1,22981	1,43407	1,57548	1,64266	1,67492	1,71739	1,75350	1,76919	1,78589	1,80860
60°	1,19511	1,40155	1,54032	1,59115	1,62860	1,67942	1,70448	1,71946	1,74641	1,76347
65°	1,15849	1,36965	1,49758	1,53319	1,58417	1,63089	1,64400	1,67108	1,69602	1,70402
70°	1,12055	1,33819	1,44577	1,47384	1,53889	1,56690	1,58272	1,61824	1,62752	1,64123
75°	1,08206	1,30645	1,38472	1,41825	1,48536	1,49229	1,52594	1,54734	1,55347	1,58064
80°	1,04395	1,27300	1,31772	1,36844	1,41679	1,41994	1,46301	1,46164	1,48743	1,49532
85°	1,00730	1,23605	1,24567	1,32103	1,33393	1,35777	1,38008	1,38247	1,40500	1,40253
90°	0,97330	1,19363	1,17835	1,26812	1,24799	1,29701	1,28358	1,31283	1,30514	1,32326
95°	0,94320	1,14401	1,12074	1,20156	1,17459	1,21964	1,19916	1,22662	1,22183	1,22925
100°	0,91822	1,08613	1,07444	1,11858	1,11990	1,12090	1,13543	1,11797	1,13871	1,11520
105°	0,89939	1,02006	1,04298	1,02587	1,07168	1,02227	1,06461	1,02552	1,04270	1,03014
110°	0,88747	0,94748	1,01405	0,93964	1,00794	0,95384	0,96302	0,96673	0,92884	0,93623
115°	0,88278	0,87198	0,97940	0,87865	0,91683	0,91451	0,85675	0,89389	0,85678	0,83891
120°	0,88517	0,79973	0,92940	0,85026	0,81172	0,86518	0,79746	0,78169	0,80729	0,75376
125°	0,89402	0,73924	0,85859	0,84091	0,73056	0,77424	0,77490	0,69511	0,70656	0,71880
130°	0,90831	0,70041	0,76791	0,82322	0,70594	0,66117	0,71800	0,68062	0,60692	0,62580
135°	0,92674	0,69142	0,66801	0,77248	0,72080	0,59737	0,60281	0,64955	0,60157	0,52810
140°	0,94787	0,71456	0,58273	0,67879	0,71888	0,61970	0,51443	0,53508	0,58028	0,54435
145°	0,97025	0,76471	0,54827	0,55641	0,65452	0,65294	0,54743	0,44593	0,45351	0,50600
150°	0,99253	0,83206	0,59025	0,45996	0,52262	0,60527	0,60146	0,51344	0,40440	0,36523
155°	1,01346	0,90606	0,69512	0,48117	0,39239	0,45502	0,53636	0,55980	0,51465	0,42293
160°	1,03202	0,97767	0,82717	0,62976	0,43956	0,32847	0,34653	0,42394	0,48485	0,50285
165°	1,04732	1,03990	0,95577	0,82286	0,66424	0,50018	0,35389	0,25997	0,25362	0,30808
170°	1,05872	1,08770	1,06043	0,99604	0,90778	0,80439	0,69226	0,57672	0,46256	0,35484
175°	1,06575	1,11770	1,12797	1,11345	1,08234	1,04207	0,99515	0,94378	0,88940	0,83305
180°	1,06812	1,12791	1,15129	1,15397	1,14508	1,12996	1,11101	1,08998	1,06788	1,04529

Zahlentafel 2. rad φ

Für $\omega = 0$: $\varphi = 0$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	0,34278	0,28577	0,23417	0,19553	0,16616	0,14322	0,12504	0,11054	0,09898	0,08978
5°	0,34279	0,28592	0,23428	0,19554	0,16608	0,14316	0,12512	0,11084	0,09953	0,09060
10°	0,34281	0,28632	0,23451	0,19553	0,16592	0,14316	0,12559	0,11200	0,10142	0,09299
15°	0,34277	0,28684	0,23483	0,19546	0,16588	0,14372	0,12715	0,11462	0,10481	0,09665
20°	0,34260	0,28725	0,23489	0,19535	0,16641	0,14557	0,13049	0,11896	0,10930	0,10056
25°	0,34217	0,28726	0,23451	0,19540	0,16810	0,14939	0,13574	0,12434	0,11375	0,10392
30°	0,34129	0,28649	0,23357	0,19599	0,17160	0,15528	0,14206	0,12942	0,11751	0,10757
35°	0,33976	0,28454	0,23202	0,19771	0,17720	0,16236	0,14782	0,13347	0,12174	0,11354
40°	0,33728	0,28101	0,23019	0,20107	0,18436	0,16885	0,15192	0,13771	0,12855	0,12180
45°	0,33351	0,27556	0,22847	0,20618	0,19145	0,17287	0,15522	0,14443	0,13753	0,12909
50°	0,32803	0,26798	0,22746	0,21231	0,19617	0,17450	0,16017	0,15347	0,14482	0,13413
55°	0,32037	0,25829	0,22754	0,21771	0,19662	0,17545	0,16783	0,16069	0,14840	0,14067
60°	0,30993	0,24672	0,22868	0,21974	0,19271	0,17844	0,17489	0,16224	0,15231	0,14976
65°	0,29610	0,23380	0,22994	0,21565	0,18682	0,18324	0,17545	0,16073	0,15889	0,15304
70°	0,27818	0,22019	0,22947	0,20384	0,18211	0,18477	0,16753	0,16160	0,16030	0,16096
75°	0,25542	0,20665	0,22435	0,18519	0,17935	0,17576	0,15687	0,16133	0,14938	0,14652
80°	0,22716	0,19361	0,20989	0,16326	0,17422	0,15364	0,14894	0,14736	0,13473	0,13956
85°	0,19280	0,18112	0,18587	0,14232	0,15795	0,12519	0,13688	0,11698	0,12849	0,11200
90°	0,15198	0,16852	0,14697	0,12404	0,12220	0,09963	0,10434	0,08491	0,09127	0,07505
95°	0,10467	0,15423	0,09552	0,10467	0,06713	0,07443	0,04674	0,05398	0,03429	0,03872
100°	0,05134	0,13561	0,03591	0,07458	0,00497	0,03098	— 0,01633	— 0,00308	— 0,03174	— 0,03085
105°	— 0,00696	0,10878	— 0,02260	0,02034	— 0,05027	— 0,05106	— 0,07099	— 0,10334	— 0,09420	— 0,13685
110°	— 0,06863	0,06840	— 0,07556	— 0,06901	— 0,09932	— 0,16578	— 0,14254	— 0,21105	— 0,20922	— 0,22338
115°	— 0,13163	0,00779	— 0,12091	— 0,19068	— 0,16351	— 0,27641	— 0,27541	— 0,30296	— 0,37594	— 0,36326
120°	— 0,19375	— 0,08060	— 0,16322	— 0,32158	— 0,27771	— 0,36471	— 0,46071	— 0,43863	— 0,51912	— 0,58564
125°	— 0,25293	— 0,20256	— 0,21368	— 0,43382	— 0,46467	— 0,46559	— 0,62176	— 0,67936	— 0,67522	— 0,79202
130°	— 0,30749	— 0,35710	— 0,29054	— 0,51878	— 0,68766	— 0,65239	— 0,74789	— 0,92991	— 0,97293	— 0,98828
135°	— 0,35632	— 0,53090	— 0,42187	— 0,59222	— 0,86992	— 0,96172	— 0,94098	— 1,10333	— 1,31178	— 1,37434
140°	— 0,39883	— 0,70082	— 0,64130	— 0,69075	— 0,99099	— 1,26680	— 1,32703	— 1,33327	— 1,53027	— 1,78339
145°	— 0,43493	— 0,84623	— 0,95271	— 0,88060	— 1,09678	— 1,45435	— 1,75099	— 1,83940	— 1,84620	— 2,03650
150°	— 0,46483	— 0,95849	— 1,27496	— 1,26141	— 1,28506	— 1,58531	— 1,98425	— 2,34429	— 2,54242	— 2,56030
155°	— 0,48896	— 1,03938	— 1,51439	— 1,78385	— 1,75947	— 1,82377	— 2,14476	— 2,57333	— 3,01045	— 3,38096
160°	— 0,50782	— 1,09498	— 1,66044	— 2,15319	— 2,49027	— 2,55812	— 2,56085	— 2,80869	— 3,21952	— 3,69213
165°	— 0,52190	— 1,13163	— 1,74269	— 2,33227	— 2,88456	— 3,37179	— 3,73289	— 3,87096	— 3,88099	— 4,07497
170°	— 0,53162	— 1,15441	— 1,78689	— 2,41266	— 3,02797	— 3,63092	— 4,21899	— 4,78738	— 5,32683	— 5,81859
175°	— 0,53732	— 1,16675	— 1,80835	— 2,44593	— 3,07932	— 3,70614	— 4,32790	— 4,94505	— 5,55803	— 6,16723
180°	— 0,53919	— 1,17065	— 1,81473	— 2,45607	— 3,09226	— 3,72322	— 4,34972	— 4,97232	— 5,59157	— 6,20791

Zahlentafel 3. φ°

Für $\omega = 0$: $\varphi = 0$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	19,640	16,373	13,417	11,203	9,520	8,206	7,164	6,333	5,671	5,144
5°	19,641	16,382	13,423	11,204	9,516	8,202	7,169	6,350	5,703	5,191
10°	19,642	16,405	13,436	11,203	9,506	8,202	7,196	6,417	5,811	5,328
15°	19,639	16,435	13,455	11,199	9,504	8,235	7,285	6,567	6,005	5,537
20°	19,630	16,458	13,458	11,193	9,534	8,341	7,476	6,816	6,262	5,762
25°	19,605	16,459	13,437	11,195	9,631	8,559	7,778	7,124	6,517	5,954
30°	19,555	16,414	13,383	11,229	9,832	8,897	8,139	7,415	6,733	6,163
35°	19,467	16,303	13,294	11,328	10,153	9,302	8,469	7,647	6,975	6,505
40°	19,325	16,101	13,189	11,521	10,563	9,674	8,704	7,890	7,365	6,978
45°	19,109	15,788	13,090	11,813	10,969	9,905	8,893	8,275	7,880	7,396
50°	18,795	15,354	13,033	12,165	11,240	9,998	9,177	8,793	8,297	7,685
55°	18,356	14,799	13,037	12,474	11,265	10,053	9,616	9,207	8,503	8,060
60°	17,758	14,136	13,102	12,590	11,042	10,224	10,021	9,296	8,726	8,581
65°	16,965	13,396	13,175	12,356	10,704	10,499	10,053	9,209	9,103	8,769
70°	15,939	12,616	13,148	11,679	10,434	10,587	9,599	9,259	9,184	9,222
75°	14,634	11,840	12,854	10,611	10,276	10,070	8,988	9,243	8,559	8,395
80°	13,015	11,093	12,026	9,354	9,982	8,803	8,534	8,443	7,719	7,996
85°	11,047	10,377	10,650	8,155	9,050	7,173	7,843	6,702	7,362	6,417
90°	8,708	9,655	8,421	7,107	7,002	5,709	5,978	4,865	5,229	4,300
95°	5,997	8,837	5,473	5,997	3,846	4,264	2,678	3,093	1,964	2,218
100°	2,942	7,770	2,057	4,273	0,285	1,775	— 0,936	— 0,176	— 1,819	— 1,768
105°	— 0,399	6,233	— 1,295	1,165	— 2,880	— 2,926	— 4,068	— 5,921	— 5,397	— 7,841
110°	— 3,932	3,919	— 4,329	— 3,954	— 5,691	— 9,498	— 8,167	— 12,092	— 11,987	— 12,799
115°	— 7,542	0,446	— 6,927	— 10,925	— 9,368	— 15,837	— 15,780	— 17,359	— 21,540	— 20,813
120°	— 11,101	— 4,618	— 9,352	— 18,425	— 15,911	— 20,896	— 26,397	— 25,132	— 29,743	— 33,555
125°	— 14,492	— 11,606	— 12,243	— 24,856	— 26,624	— 26,676	— 35,624	— 38,925	— 38,687	— 45,380
130°	— 17,618	— 20,460	— 16,646	— 29,724	— 39,400	— 37,379	— 42,851	— 53,280	— 55,745	— 56,624
135°	— 20,416	— 30,418	— 24,171	— 33,931	— 49,843	— 55,102	— 53,914	— 63,216	— 75,159	— 78,744
140°	— 22,851	— 40,154	— 36,744	— 39,577	— 56,779	— 72,583	— 76,033	— 76,390	— 87,678	— 102,181
145°	— 24,919	— 48,485	— 54,586	— 50,455	— 62,841	— 83,328	— 100,325	— 105,390	— 105,779	— 116,683
150°	— 26,633	— 54,917	— 73,050	— 72,273	— 73,629	— 90,832	— 113,689	— 134,318	— 145,670	— 146,695
155°	— 28,015	— 59,552	— 86,768	— 102,207	— 100,810	— 104,494	— 122,886	— 147,441	— 172,486	— 193,715
160°	— 29,096	— 62,738	— 95,136	— 123,369	— 142,682	— 146,570	— 146,726	— 160,926	— 184,465	— 211,543
165°	— 29,902	— 64,838	— 99,849	— 133,629	— 165,273	— 193,189	— 213,879	— 221,790	— 222,365	— 233,479
170°	— 30,460	— 66,143	— 102,381	— 138,235	— 173,490	— 208,037	— 241,731	— 274,297	— 305,205	— 333,380
175°	— 30,786	— 66,850	— 103,611	— 140,141	— 176,432	— 212,346	— 247,970	— 283,330	— 318,452	— 353,356
180°	— 30,894	— 67,073	— 103,976	— 140,722	— 177,174	— 213,325	— 249,220	— 284,893	— 320,373	— 355,687

Zahlentafel 4. $\Re e\, \psi$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	0,32062	— 1,08892	— 1,76676	— 0,90730	0,82145	1,88140	1,27835	— 0,49086	— 1,84441	— 1,54004
5°	0,32550	— 1,07814	— 1,76630	— 0,93051	0,78854	1,87404	1,31576	— 0,43428	— 1,82269	— 1,58410
10°	0,34005	— 1,04561	— 1,76359	— 0,99844	0,68886	1,84641	1,42163	— 0,26324	— 1,74490	— 1,70184
15°	0,36391	— 0,99081	— 1,75481	— 1,10587	0,52028	1,78247	1,57580	0,02311	— 1,57591	— 1,84773
20°	0,39650	— 0,91303	— 1,73373	— 1,24335	0,28170	1,65764	1,74214	0,41617	— 1,26793	— 1,94170
25°	0,43701	— 0,81162	— 1,69229	— 1,39653	— 0,02353	1,44325	1,86712	0,88450	— 0,78027	— 1,87322
30°	0,48436	— 0,68633	— 1,62130	— 1,54568	— 0,38334	1,11413	1,88296	1,36007	— 0,11054	— 1,52622
35°	0,53723	— 0,53764	— 1,51146	— 1,66603	— 0,77293	0,65953	1,71901	1,73277	0,66956	— 0,83526
40°	0,59410	— 0,36716	— 1,35487	— 1,72947	— 1,15238	0,09595	1,32379	1,86480	1,39239	0,13602
45°	0,65321	— 0,17795	— 1,14662	— 1,70783	— 1,46801	— 0,52272	0,69479	1,63354	1,81607	1,13753
50°	0,71262	0,02528	— 0,88655	— 1,57798	— 1,65901	— 1,10342	— 0,09422	0,99849	1,71220	1,76901
55°	0,77029	0,23605	— 0,58068	— 1,32772	— 1,66995	— 1,52701	— 0,88574	0,06529	1,00573	1,66104
60°	0,82409	0,44630	— 0,24218	— 0,96161	— 1,46726	— 1,67828	— 1,46778	— 0,89896	— 0,10488	0,74694
65°	0,87194	0,64672	0,10923	— 0,50454	— 1,05538	— 1,48738	— 1,64395	— 1,53912	— 1,15599	0,55727
70°	0,91187	0,82740	0,44829	0,00166	— 0,48615	— 0,96822	— 1,32396	— 1,57037	— 1,61989	— 1,48521
75°	0,94212	0,97849	0,74723	0,48675	0,14438	— 0,23462	— 0,59115	— 0,95002	— 1,22452	— 1,45160
80°	0,96121	1,09127	0,98120	0,89505	0,71420	0,52044	0,29971	0,05006	— 0,18805	— 0,44938
85°	0,96808	1,15879	1,12310	1,16500	1,10565	1,08244	1,01263	0,94898	0,85910	0,77710
90°	0,96208	1,17672	1,16564	1,25838	1,23869	1,29058	1,27660	1,30810	1,29971	1,31953
95°	0,94306	1,14378	1,10535	1,16598	1,09568	1,09901	1,01385	0,98147	0,89390	0,82701
100°	0,91136	1,06189	0,95051	0,91038	0,72789	0,59530	0,37750	0,19853	— 0,02707	— 0,21777
105°	0,86781	0,93598	0,72736	0,54132	0,24059	— 0,03391	— 0,32672	— 0,58171	— 0,78527	— 0,94205
110°	0,81368	0,77353	0,45851	0,12526	— 0,23824	— 0,57505	— 0,79213	— 0,94852	— 0,91898	— 0,82072
115°	0,75062	0,58367	0,17730	— 0,26833	— 0,59470	— 0,86532	— 0,85311	— 0,76563	— 0,43526	— 0,10288
120°	0,68057	0,37651	— 0,08577	— 0,58006	— 0,75857	— 0,84374	— 0,54456	— 0,21133	0,24374	0,57770
125°	0,60566	0,16211	— 0,30536	— 0,77005	— 0,71728	— 0,55828	— 0,05852	0,36663	0,63751	0,69740
130°	0,52814	— 0,05030	— 0,46356	— 0,82213	— 0,51169	— 0,13347	0,36607	0,66553	0,53977	0,26532
135°	0,45029	— 0,25281	— 0,55193	— 0,74260	— 0,21778	0,28218	0,55698	0,57704	0,10666	— 0,29443
140°	0,37428	— 0,43930	— 0,57086	— 0,55507	0,07807	0,56581	0,47258	0,20460	— 0,31347	— 0,54425
145°	0,30218	— 0,60549	— 0,52861	— 0,29328	0,30233	0,65053	0,19741	— 0,22875	— 0,44390	— 0,35135
150°	0,23587	— 0,74885	— 0,43927	0,00604	0,41029	0,53167	— 0,11504	— 0,50750	— 0,24760	0,08148
155°	0,17698	— 0,86833	— 0,32042	0,30876	0,39238	0,25405	— 0,31813	— 0,51582	0,08790	0,41977
160°	0,12691	— 0,96403	— 0,19089	0,58687	0,27132	— 0,11025	— 0,33244	— 0,26304	0,30531	0,43571
165°	0,08680	— 1,03673	— 0,06868	0,81973	0,09255	— 0,48370	— 0,17004	0,14740	0,25361	0,12081
170°	0,05753	— 1,08754	0,03067	0,99368	— 0,08884	— 0,79908	0,08086	0,57387	— 0,02448	— 0,35454
175°	0,03973	— 1,11753	0,09525	1,10136	— 0,22172	— 1,00743	0,29949	0,88713	— 0,33536	— 0,76024
180°	0,03375	— 1,12743	0,11762	1,13676	— 0,27028	— 1,08001	0,38529	1,00140	— 0,46871	— 0.91735

Zahlentafel 5. $\mathfrak{Im}\,\psi$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	1,38169	1,25421	— 0,16403	— 1,59626	— 1,68428	— 0,26507	1,43150	1,87109	0,62312	— 1,20761
5°	1,37896	1,26068	— 0,14386	— 1,58060	— 1,69841	— 0,30793	1,39687	1,88522	0,68500	— 1,14958
10°	1,37067	1,27952	— 0,08355	— 1,53185	— 1,73695	— 0,43462	1,28784	1,91673	0,86471	— 0,96605
15°	1,35652	1,30907	0,01577	— 1,44499	— 1,78828	— 0,63838	1,09070	1,93334	1,14092	— 0,63522
20°	1,33601	1,34656	0,15232	— 1,31272	— 1,83310	— 0,90440	0,78878	1,88328	1,46756	— 0,14142
25°	1,30853	1,38816	0,32223	— 1,12709	— 1,84502	— 1,20568	0,37210	1,70237	1,76361	0,49387
30°	1,27334	1,42904	0,51925	— 0,88192	— 1,79271	— 1,49939	— 0,14847	1,33058	1,91183	1,17708
35°	1,22971	1,46357	0,73407	— 0,57573	— 1,64424	— 1,72659	— 0,72943	0,73976	1,77950	1,72437
40°	1,17693	1,48554	0,95355	— 0,21496	— 1,37425	— 1,81820	— 1,28095	— 0,03192	1,27078	1,89267
45°	1,11439	1,48858	1,16140	0,18341	— 0,97315	— 1,70931	— 1,67795	— 0,85440	0,40288	1,48454
50°	1,04170	1,46662	1,33843	0,59059	— 0,45650	— 1,36127	— 1,78618	— 1,51283	— 0,63138	0,50643
55°	0,95870	1,41450	1,46457	0,96720	0,12900	— 0,78591	— 1,51335	— 1,76799	— 1,47577	— 0,71553
60°	0,86555	1,32860	1,52116	1,26771	0,70674	— 0,06187	— 0,86652	— 1,46575	— 1,74329	— 1,59746
65°	0,76278	1,20735	1,49359	1,44780	1,18142	0,66894	0,01284	— 0,65087	— 1,24103	— 1,61032
70°	0,65125	1,05175	1,37452	1,47384	1,46008	1,23196	0,86726	0,39068	— 0,15744	— 0,69843
75°	0,53224	0,86565	1,16581	1,33210	1,47833	1,47373	1,40678	1,22136	0,95594	0,62553
80°	0,40731	0,65548	0,87957	1,03514	1,22361	1,32113	1,43198	1,46078	1,47549	1,42620
85°	0,27833	0,43014	0,53883	0,62281	0,74627	0,81968	0,93765	1,00532	1,11174	1,16757
90°	0,14735	0,20020	0,17256	0,15689	0,15213	0,12901	0,13369	0,11134	0,11896	0,09922
95°	0,01652	— 0,02298	— 0,18513	— 0,29022	— 0,42327	— 0,52886	— 0,64038	— 0,73574	— 0,83295	— 0,90945
100°	— 0,11202	— 0,22820	— 0,50095	— 0,64995	— 0,85109	— 0,94975	— 1,07084	— 1,10020	— 1,13839	— 1,09373
105°	— 0,23623	— 0,40554	— 0,74750	— 0,87143	— 1,04432	— 1,02171	— 1,01324	— 0,84458	— 0,68599	— 0,41681
110°	— 0,35428	— 0,54715	— 0,90447	— 0,93126	— 0,97938	— 0,76101	— 0,54766	— 0,18674	0,13495	0,45049
115°	— 0,46461	— 0,64782	— 0,96321	— 0,83667	— 0,69779	— 0,29589	0,07884	0,46136	0,73798	0,38258
120°	— 0,56600	— 0,70555	— 0,92543	— 0,62167	— 0,28890	0,19143	0,58258	0,75258	0,76958	0,48417
125°	— 0,65761	— 0,72125	— 0,80246	— 0,33786	0,13866	0,53644	0,77268	0,59056	0,30464	— 0,17407
130°	— 0,73898	— 0,69860	— 0,61220	— 0,04251	0,48634	0,64755	0,61767	0,14253	— 0,27748	— 0,56677
135°	— 0,80999	— 0,64355	— 0,37631	0,21277	0,68711	0,52653	0,23055	— 0,29822	— 0,59204	— 0,43840
140°	— 0,87084	— 0,56357	— 0,11701	0,39071	0,71463	0,25275	— 0,20324	— 0,49442	— 0,48833	0,01037
145°	— 0,92199	— 0,46708	0,14549	0,47284	0,58051	— 0,05613	— 0,51060	— 0,38279	— 0,09286	0,36412
150°	— 0,96409	— 0,36271	0,39425	0,45992	0,32372	— 0,28927	— 0,59036	— 0,07789	0,31974	0,35602
155°	— 0,99789	— 0,25874	0,61687	0,36904	— 0,00307	— 0,37749	— 0,43183	0,21749	0,50709	0,05161
160°	— 1,02418	— 0,16274	0,80484	0,22845	— 0,34583	— 0,30942	— 0,09779	0,33247	0,37664	— 0,25102
165°	— 1,04372	— 0,08114	— 0,95330	0,07167	— 0,65776	— 0,12735	0,31037	0,21414	— 0,00202	— 0,28341
170°	— 1,05716	— 0,01911	1,05999	— 0,06838	— 0,90343	0,09230	0,68753	— 0,05727	— 0,46191	— 0,01465
175°	— 1,06501	0,01961	1,12394	— 0,16367	— 1,05938	0,26644	0,94901	— 0,32206	— 0,79579	— 0,34060
180°	— 1,06759	0,03277	1,14527	— 0,19851	— 1,11272	0,33224	1,04207	— 0,43043	— 0,95951	0,50108

Für $\omega = 0$: $B_0 = -1$,
sonst alle A_n und $B_n = 0$

Zahlentafel 6. A_n, B_n

n \ ω	1		2		3		4		5	
	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n
0	0,5	— 0,5	0,4	— 0,2	0,3	— 0,1	0,235294	— 0,058824	0,192308	— 0,038462
1	1,2	— 0,6	1,2	0,6	0,635294	0,741176	0,369231	0,646154	0,238474	0,548490
2	0,449438	— 0,280899	1,342282	0,939597	0	1,666667	— 0,588081	1,155159	— 0,681153	0,774811
3	0,093569	— 0,060025	0,7	0,35	— 0,162232	1,838627	— 1,642877	0,916220	— 1,521279	— 0,026457
4	0,013824	— 0,008876	0,211342	0,097398	0,082380	0,972863	— 1,805150	0,869469	— 1,757668	— 1,036099
5	0,001573	— 0,001010	0,048729	0,022308	0,046025	0,338694	— 0,916504	0,674048	— 1,786254	— 1,161560
6	0,000146	— 0,000093	0,009130	0,004178	0,013695	0,096401	— 0,337216	0,284536	— 1,183345	— 0,479719
7	0,000011	— 0,000007	0,001439	0,000658	0,003299	0,023147	— 0,108517	0,093508	— 0,508487	— 0,159960
8	0,000001	— 0,000000	0,000195	0,000089	0,000682	0,004786	— 0,030415	0,026265	— 0,181652	— 0,054152
9			0,000023	0,000011	0,000124	0,000868	— 0,007477	0,006458	— 0,056866	0,016834
10			0,000002	0,000001	0,000020	0,000140	— 0,001634	0,001411	— 0,015808	— 0,004677
11					0,000003	0,000020	— 0,000321	0,000277	— 0,003946	— 0,001167
12					0,000000	0,000003	— 0,000057	0,000050	— 0,000893	— 0,000113
13							— 0,000009	0,000008	— 0,000185	— 0,000055
14							— 0,000001	0,000001	— 0,000035	— 0,000010

n \ ω	6		7		8		9		10	
	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n
0	0,162162	— 0,027027	0,14	— 0,02	0,123077	— 0,015385	0,109756	— 0,012195	0,099010	— 0,009901
1	0,166154	0,470769	0,122245	0,410395	0,093659	0,362927	0,074029	0,324905	0,059976	0,293882
2	— 0,655738	0,546448	— 0,605104	0,404123	— 0,553005	0,310437	— 0,505539	0,245748	— 0,463821	0,199290
3	— 1,181250	— 0,393750	— 0,911288	— 0,523496	— 0,716338	— 0,560332	— 0,575203	— 0,558942	— 0,470936	— 0,541577
4	— 0,766137	— 1,510870	— 0,167712	— 1,403857	0,146675	— 1,201915	0,311696	— 1,012855	0,397787	— 0,855118
5	— 0,017785	— 2,166749	1,027107	— 1,518581	1,293226	— 0,859480	1,280657	— 0,410198	1,181375	— 0,119419
6	0,057470	— 2,236196	1,929446	— 1,199269	1,944514	0,145315	1,467983	0,797613	1,010101	1,053796
7	— 0,234253	— 1,379777	2,009935	— 1,174946	2,113909	1,052729	0,900585	1,841773	0,004522	1,772945
8	— 0,159045	— 0,597906	1,131474	— 0,998624	2,131123	1,121297	0,228775	2,429237	— 1,171374	1,788580
9	— 0,065062	— 0,226397	0,474624	— 0,513318	1,540419	0,461894	0,186189	2,472283	— 1,994472	1,523405
10	— 0,022322	— 0,076814	0,185590	— 0,210905	0,762249	0,140100	0,446970	1,638590	— 2,045713	1,511341
11	— 0,006817	— 0,023430	0,066898	— 0,076670	0,321735	0,049454	0,316282	0,785672	— 1,208727	1,308494
12	— 0,001883	— 0,006472	0,021950	— 0,025185	0,122909	0,018194	0,149351	0,337665	— 0,534478	0,743077
13	— 0,000475	— 0,001633	0,006572	— 0,007541	0,042855	0,006307	0,060502	0,134236	— 0,227707	0,343386
14	— 0,000110	— 0,000379	0,001807	— 0,002074	0,013708	0,002016	0,022236	0,049183	— 0,093044	0,142943
15	— 0,000024	— 0,000081	0,000459	— 0,000527	0,004047	0,000595	0,007521	0,016628	— 0,035516	0,054747
16	— 0,000005	— 0,000016	0,000109	— 0,000125	0,001109	0,000163	0,002357	0,005211	— 0,012587	0,019413
17			0,000024	— 0,000028	0,000284	0,000042	0,000688	0,001521	— 0,004152	0,006403
18			0,000005	— 0,000006	0,000068	0,000010	0,000188	0,000416	0,001280	0,001974
19			0,000001	— 0,000001	0,000015	0,000002	0,000048	0,000107	— 0,000370	0,000571
20							0,000012	0,000026	— 0,000101	0,000156
21							0,000003	0,000006	— 0,000026	0,000040
22									— 0,000006	0,000010

Zahlentafel 7. $f_n(\omega)$

$f_n(0) = 0$

n \ ω	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	— 1	— 2	— 3	— 4	— 5
2	— 3	— 6	— 9	— 12	— 15
3	— 14	— 22	— 18	4	50
4	— 95	— 130	— 45	220	725
5	— 841	— 1082	— 243	1916	5275
6	— 9156	— 11382	— 2268	17556	39900
7	— 118187	— 143638	— 27297	197572	386825
8	— 1763649	— 2109042	— 389043	2682684	4804875
9	— 29863846	— 35279162	— 6368058	42444476	72012250
10	— 565649425	— 661867910	— 117491715	763522100	1248110875
11	— 11848774079	— 13758109462	— 2410013493	15354852484	24410022125
12	— 271956154392	— 313789045986	— 54372884904	340945253532	530227737000
13	— 6787055085721	— 7789693711802	— 1337632001163	8277953698556	12645442871875
14	— 182978531160075	— 209066574034710	— 35626708067265	218049625804500	328171264115625
15	— 5299590348556454	— 6031771872159382	— 1021135845940218	6190991889153604	9200830587556250

n \ ω	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0
1	— 6	— 7	— 8	— 9	— 10
2	— 18	— 21	— 24	— 27	— 30
3	126	238	392	594	850
4	1530	2695	4280	6345	8950
5	9234	12593	13432	8991	— 4450
6	46494	6468	— 126168	— 415044	— 943950
7	271998	— 532973	— 2499832	— 6123843	— 11826350
8	2406186	— 8311527	— 29422728	— 58239081	— 83000250
9	31113234	— 115180282	— 340197128	— 494033094	— 228369250
10	504528750	— 1781160535	— 4580690840	— 4669263225	3961009250
11	9475027326	— 31760537417	— 74421891448	— 58037847111	106018119250
12	199762593498	— 643215494376	— 1418539289544	— 956660162328	2042315817750
13	4652963853714	— 14524121025967	— 30700481185928	— 19215438442209	40456083518750
14	118438570684350	— 360633708476685	— 738126477489240	— 441327364791075	888082673231250
15	3267211851112446	— 9746695615551482	— 19440837051288568	— 11242043065122246	21708789171831250

Zahlentafel 8. $g_n(\omega)$

$g_n(0) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)$

n \ ω	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	— 1	— 6	— 13	— 22
3	9	— 9	— 39	— 81	— 135
4	61	— 59	— 219	— 359	— 395
5	540	— 495	— 1620	— 1935	— 180
6	5879	— 5209	— 15849	— 15541	7895
7	75887	— 65737	— 191457	— 171073	107135
8	1132426	— 965219	— 2729214	— 2317439	1409650
9	19175355	— 16145775	— 44673525	— 36659295	21285675
10	363199319	— 302908849	— 824234049	— 659447581	369186575
11	7608010344	— 6296502729	— 16906853304	— 13261850481	7220776200
12	174621038593	— 143607927371	— 381439519551	— 294471399767	156848188225
13	4357917954481	— 3565012173359	— 9383826309039	— 7149595386479	3740685300625
14	117489163732394	— 95680896971209	— 249930354668094	— 188327533038661	97077298411250
15	3402827830284945	— 2760485963471625	— 7163525848593375	— 5347104931937505	2721724521410625

n \ ω	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	— 33	— 46	— 61	— 78	— 97
3	— 201	— 279	— 369	— 471	— 585
4	— 219	301	1321	3021	5605
5	5265	16380	35505	65340	108945
6	65799	165431	306011	474039	637895
7	665847	1347983	1705823	869967	— 2601865
8	7618941	12113626	6002641	— 25347654	— 102817475
9	105551505	139880475	— 7127775	— 501377445	— 1487710575
10	1731196719	2064161351	— 519596749	— 7473011481	— 17984753425
11	32555276919	36493245096	— 10455354129	— 116321668056	— 228908764425
12	686448287253	738200731009	— 207218953031	— 2070084435327	— 3466426239275
13	15989217212241	16666849265521	— 4511331161519	— 42330055770639	— 63769779539375
14	406996726389399	413833094349626	— 10854392836702 9	— 975234666545766	— 13751414236356 25
15	11227293245651895	11184484122128625	— 285904872830662 5	— 24853070812405455	— 33502123331495625

Zahlentafel 9. $\Re e\,(\psi \cdot e^{-i\omega})$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	1,33588	1,59360	1,72593	1,80110	1,84811	1,88053	1,90423	1,92260	1,93730	1,94917
5°	1,33622	1,59500	1,72832	1,80442	1,85233	1,88544	1,90968	1,92835	1,94301	1,95457
10°	1,33711	1,59859	1,73415	1,81193	1,86101	1,89431	1,91786	1,93463	1,94620	1,95352
15°	1,33809	1,60266	1,73947	1,81641	1,86241	1,88984	1,90458	1,90941	1,90606	1,89595
20°	1,33845	1,60438	1,73787	1,80617	1,83771	1,84432	1,83162	1,80268	1,76005	1,70616
25°	1,33720	1,60000	1,72083	1,76581	1,76256	1,72266	1,65209	1,55556	1,43774	1,30309
30°	1,33318	1,58504	1,67835	1,67776	1,61033	1,48870	1,32170	1,11853	0,88861	0,64025
35°	1,32503	1,55456	1,59992	1,52471	1,35745	1,11570	0,81674	0,47977	0,12331	— 0,23726
40°	1,31135	1,50359	1,47588	1,29314	0,99091	0,60016	0,15644	— 0,30291	— 0,74494	— 1,14378
45°	1,29066	1,42761	1,29904	0,97751	0,51676	— 0,02429	— 0,57859	— 1,08299	— 1,48865	— 1,76209
50°	1,26159	1,32307	1,06656	0,58448	— 0,03285	— 0,67911	— 1,24453	— 1,64201	— 1,82024	— 1,75983
55°	1,22290	1,18797	0,78154	0,13587	— 0,59740	— 1,24660	— 1,66201	— 1,75867	— 1,52455	— 1,00447
60°	1,17359	1,02236	0,45442	— 0,33086	— 1,09392	— 1,59415	— 1,67586	— 1,31936	— 0,62288	0,24232
65°	1,11296	0,82871	0,10264	— 0,76591	— 1,43227	— 1,61505	— 1,23094	— 0,42000	0,54181	1,34364
70°	1,04069	0,61204	— 0,24983	— 1,11433	— 1,53801	— 1,27389	— 0,42835	0,61501	1,41105	1,62615
75°	0,95689	0,37994	— 0,57523	— 1,32630	— 1,37665	— 0,63706	0,47857	1,34659	1,50966	0,87769
80°	0,86209	0,14190	— 0,84726	— 1,36844	— 0,97076	0,13056	1,16675	1,43796	0,77942	— 0,39882
85°	0,75727	— 0,09110	— 1,03582	— 1,23284	— 0,40199	0,81029	1,37945	0,85654	— 0,32459	— 1,28722
90°	0,64381	— 0,30765	— 1,12963	— 0,94127	0,20549	1,20313	1,05026	— 0,08017	— 1,13518	— 1,16116
95°	0,52344	— 0,49687	— 1,12041	— 0,54250	0,71668	1,20301	0,34363	— 0,87072	— 1,15773	— 0,19916
100°	0,39815	— 0,64941	— 1,01169	— 0,10318	1,02261	0,83697	— 0,41893	— 1,11738	— 0,44449	0,77774
105°	0,27010	— 0,75826	— 0,82557	0,30566	1,06967	0,25292	— 0,91200	— 0,75095	0,43277	1,01720
110°	0,14152	— 0,81942	— 0,58156	0,62290	0,87157	— 0,33951	— 0,95700	— 0,04674	0,89293	0,44357
115°	0,01461	— 0,83196	— 0,31146	0,80859	0,50044	— 0,74818	— 0,59137	0,56785	0,70071	— 0,36662
120°	— 0,10856	— 0,79824	— 0,04568	0,84964	0,06185	— 0,86362	— 0,02780	0,77532	0,09508	— 0,74813
125°	— 0,22612	— 0,72329	0,18906	0,75903	— 0,33643	— 0,68593	0,46352	0,53093	— 0,45531	— 0,49047
130°	— 0,33648	— 0,61430	0,37253	0,56955	— 0,61151	— 0,30909	0,68179	0,04418	— 0,60616	0,08571
135°	— 0,43829	— 0,47997	0,49330	0,32437	— 0,72066	0,12382	0,57138	— 0,37900	— 0,34117	0,48555
140°	— 0,53056	— 0,32964	0,54864	0,06713	— 0,66313	0,47265	0,22275	— 0,51893	0,08437	0,45102
145°	— 0,61256	— 0,17274	0,54385	— 0,16614	— 0,47090	0,64030	— 0,18663	— 0,34543	0,36618	0,09672
150°	— 0,68382	— 0,01828	0,49051	— 0,35202	— 0,19404	0,59132	— 0,47458	— 0,00322	0,35736	— 0,26205
155°	— 0,74407	0,12608	0,40427	— 0,48111	0,11425	0,34941	— 0,52354	0,29022	0,12889	— 0,38029
160°	— 0,79325	0,25320	0,30256	— 0,55649	0,40859	— 0,01941	— 0,31487	0,36720	— 0,12296	— 0,22903
165°	— 0,83136	0,35765	0,20252	— 0,59005	0,65699	— 0,42885	0,07571	0,19042	— 0,23191	0,05282
170°	— 0,85848	0,43520	0,11922	— 0,59776	0,84112	— 0,79304	0,51266	— 0,14016	— 0,16806	0,30545
175°	— 0,87471	0,48289	0,06432	— 0,59603	0,95298	— 1,04175	0,84928	— 0,44771	— 0,03393	0,45260
180°	— 0,88011	0,49897	0,04518	— 0,59281	0,99035	— 1,12983	0,97509	— 0,57155	0,03163	0,49713

Zahlentafel 10. $\mathfrak{Im}\,(\psi \cdot e^{-i\omega})$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	0,47674	0,46821	0,41171	0,35673	0,30994	0,27118	0,23936	0,21340	0,19238	0,17546
5°	0,47115	0,45573	0,39168	0,32894	0,27438	0,22797	0,18867	0,15536	0,12704	0,10280
10°	0,45443	0,41831	0,33159	0,24566	0,16786	0,09861	0,03691	— 0,01845	— 0,06876	— 0,11526
15°	0,42671	0,35618	0,23203	0,10759	— 0,00836	— 0,11491	— 0,21300	— 0,30416	— 0,39007	— 0,47221
20°	0,38820	0,26985	0,09387	— 0,08292	— 0,24985	— 0,40521	— 0,54990	— 0,68576	— 0,81460	— 0,93766
25°	0,33927	0,16033	— 0,08019	— 0,32018	— 0,54593	— 0,75439	— 0,94615	— 1,12279	— 1,28532	— 1,43347
30°	0,28042	0,02939	— 0,28526	— 0,59331	— 0,87612	— 1,12836	— 1,34938	— 1,53920	— 1,69638	— 1,81795
35°	0,21235	— 0,12018	— 0,51342	— 0,88454	— 1,20759	— 1,47354	— 1,67928	— 1,82197	— 1,89730	— 1,90127
40°	0,13598	— 0,28435	— 0,75281	— 1,16836	— 1,49487	— 1,71897	— 1,83542	— 1,84031	— 1,73167	— 1,51409
45°	0,05245	— 0,45766	— 0,98796	— 1,41238	— 1,68375	— 1,78729	— 1,72148	— 1,49184	— 1,11552	— 0,62679
50°	— 0,03682	— 0,63332	— 1,19993	— 1,58025	— 1,72036	— 1,61536	— 1,28470	— 0,76775	— 0,13036	0,53744
55°	— 0,13019	— 0,80328	— 1,36797	— 1,63703	— 1,56476	— 1,18128	— 0,55900	0,19265	0,93014	1,50402
60°	— 0,22579	— 0,95871	— 1,47177	— 1,55638	— 1,20652	— 0,52834	0,31104	1,10266	1,63158	1,74674
65°	— 0,32158	— 1,09050	— 1,49406	— 1,32818	— 0,67691	0,22670	1,08973	1,61744	1,60715	1,04800
70°	— 0,41544	— 1,19003	— 1,42403	— 0,96462	— 0,05201	0,91235	1,52365	1,49682	0,81103	— 0,22195
75°	— 0,50520	— 1,24998	— 1,25959	— 0,50235	0,55779	1,34947	1,44895	0,76220	— 0,36634	— 1,31457
80°	— 0,58876	— 1,26507	— 1,00923	0,00077	1,03196	1,41393	0,88267	— 0,20207	— 1,26687	— 1,44116
85°	— 0,66423	— 1,23269	— 0,69193	0,47458	1,27192	1,08948	0,04161	— 1,08515	— 1,36699	— 0,55692
90°	— 0,72995	— 1,15330	— 0,33533	0,84979	1,23096	0,48448	— 0,73792	— 1,31038	— 0,64402	0,63460
95°	— 0,78463	— 1,03047	0,02729	1,07212	0,93061	— 0,20071	— 1,14887	— 0,86397	0,39053	1,21301
100°	— 0,82741	— 0,87060	0,36180	1,11381	0,45657	— 0,74559	— 1,05532	— 0,03634	1,04838	0,79925
105°	— 0,85788	— 0,68232	0,63738	0,97928	— 0,06553	— 0,99049	— 0,54923	0,69841	0,94865	— 0,16277
110°	— 0,87611	— 0,47567	0,83072	0,70351	— 0,50627	— 0,89137	0,10754	0,96560	0,25577	— 0,82448
115°	— 0,88266	— 0,26114	0,92855	0,34381	— 0,76821	— 0,52589	0,61992	0,69036	— 0,49302	— 0,75456
120°	— 0,87849	— 0,04875	0,92827	— 0,03264	— 0,80936	— 0,05194	0,79698	0,09958	— 0,80164	— 0,09197
125°	— 0,86495	0,15274	0,83752	— 0,36193	— 0,64848	0,35908	0,62098	— 0,44865	— 0,54030	0,52546
130°	— 0,84369	0,33646	0,67149	— 0,59440	— 0,35271	0,58447	0,22516	— 0,67918	0,03037	0,61990
135°	— 0,81654	0,49769	0,45043	— 0,70108	— 0,01393	0,58440	— 0,19211	— 0,52751	0,49547	0,20768
140°	— 0,78546	0,63398	0,19640	— 0,67547	0,27758	0,40078	— 0,46370	— 0,13048	0,57412	— 0,30479
145°	— 0,75243	0,74495	— 0,06943	— 0,53102	0,45458	0,12787	— 0,51463	0,28201	0,26755	— 0,49667
150°	— 0,71938	0,83186	— 0,32831	— 0,29606	0,48526	— 0,12919	— 0,36950	0,51343	— 0,18928	— 0,25440
155°	— 0,68809	0,89724	— 0,56548	— 0,00755	0,37539	— 0,29147	— 0,11655	0,47869	— 0,49825	0,18506
160°	— 0,66016	0,94432	— 0,76985	0,29482	0,16208	— 0,32790	0,14469	0,21187	— 0,46900	0,44766
165°	— 0,63697	0,97646	— 0,93406	0,57353	— 0,09783	— 0,25743	0,34570	— 0,17699	— 0,10268	0,30352
170°	— 0,61960	0,99685	— 1,05371	0,79672	— 0,34146	— 0,13466	0,46520	— 0,55943	0,43095	— 0,18058
175°	— 0,60885	1,00801	— 1,12613	0,94048	— 0,51312	— 0,02567	0,51870	— 0,83083	0,88875	— 0,69938
180°	— 0,60522	1,01154	— 1,15040	0,99006	— 0,57481	0,01724	0,53249	— 0,92811	1,06741	— 0,91950

Zahlentafel 11. $\left|\frac{p}{p_0}\right|^2$

Für $\omega = 0$: $\left|\frac{p}{p_0}\right|^2 = 1$

ϑ \ ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	2,01185	2,75878	3,14834	3,37123	3,51158	3,60992	3,68337	3,74192	3,79012	3,83004
5°	2,00748	2,75170	3,14051	3,36413	3,50640	3,60684	3,68248	3,74266	3,79142	3,83090
10°	1,99436	2,73048	3,11723	3,34345	3,49152	3,59814	3,67954	3,74313	3,79241	3,82951
15°	1,97256	2,69537	3,07961	3,31093	3,46865	3,58471	3,67279	3,73834	3,78521	3,81759
20°	1,94214	2,64684	3,02902	3,26913	3,43962	3,56571	3,65721	3,71992	3,76137	3,79021
25°	1,90321	2,58571	2,96767	3,22061	3,40466	3,53665	3,62459	3,68041	3,71914	3,75287
30°	1,85600	2,51320	2,89823	3,16690	3,36074	3,48944	3,56771	3,62024	3,66733	3,71487
35°	1,80080	2,43109	2,82336	3,10714	3,30093	3,41610	3,48706	3,54975	3,61493	3,67111
40°	1,73812	2,34164	2,74494	3,03727	3,21653	3,31505	3,39325	3,47851	3,55362	3,60070
45°	1,66855	2,24753	2,66358	2,95034	3,10206	3,19499	3,29824	3,39846	3,46044	3,49783
50°	1,59297	2,15160	2,57737	2,83880	2,96070	3,07058	3,19933	3,28564	3,33026	3,38585
55°	1,51244	2,05654	2,48215	2,69833	2,80537	2,94942	3,07476	3,13005	3,18940	3,27104
60°	1,42829	1,96435	2,37259	2,53177	2,65234	2,82046	2,90524	2,95656	3,04995	3,10981
65°	1,34210	1,87595	2,24274	2,35068	2,50959	2,65979	2,70273	2,79252	2,87647	2,90367
70°	1,25562	1,79076	2,09026	2,17221	2,36817	2,45517	2,50501	2,61870	2,64883	2,69363
75°	1,17086	1,70681	1,91746	2,01143	2,20629	2,22692	2,32848	2,39426	2,41327	2,49843
80°	1,08983	1,62053	1,73640	1,87262	2,00730	2,01624	2,14041	2,13639	2,21245	2,23599
85°	1,01465	1,52781	1,55169	1,74512	1,77938	1,84354	1,90461	1,91122	1,97402	1,96710
90°	0,94731	1,42475	1,38850	1,60812	1,55748	1,68223	1,64757	1,72353	1,70340	1,75100
95°	0,88963	1,30876	1,25607	1,44375	1,37966	1,48751	1,43797	1,50459	1,49286	1,51105
100°	0,84313	1,17968	1,15442	1,25122	1,25418	1,25642	1,28920	1,24986	1,29666	1,24368
105°	0,80891	1,04053	1,08781	1,05241	1,14849	1,04503	1,13340	1,05170	1,08722	1,06119
110°	0,78760	0,89772	1,02830	0,88293	1,01594	0,90981	0,92741	0,93456	0,86274	0,87653
115°	0,77929	0,76034	0,95922	0,77202	0,84058	0,83634	0,73401	0,79904	0,73407	0,70377
120°	0,78352	0,63956	0,86377	0,72295	0,65888	0,74854	0,63594	0,61104	0,65171	0,56815
125°	0,79928	0,54648	0,73718	0,70713	0,53372	0,59944	0,60046	0,48318	0,49923	0,51667
130°	0,82503	0,49057	0,58968	0,67770	0,49835	0,43714	0,51553	0,46324	0,36835	0,39163
135°	0,85884	0,47807	0,44623	0,59673	0,51955	0,35685	0,36338	0,42191	0,36189	0,27889
140°	0,89845	0,51060	0,33958	0,46076	0,51679	0,38403	0,26464	0,28631	0,33673	0,29631
145°	0,94140	0,58479	0,30059	0,30959	0,42839	0,42633	0,29968	0,19885	0,20567	0,25603
150°	0,98511	0,69233	0,34839	0,21157	0,27313	0,36635	0,36176	0,26362	0,16354	0,13339
155°	1,02711	0,82094	0,48319	0,23152	0,15397	0,20704	0,28768	0,31337	0,26486	0,17887
160°	1,06505	0,95584	0,68421	0,39660	0,19321	0,10789	0,12008	0,17973	0,23508	0,25286
165°	1,09688	1,08139	0,91349	0,67709	0,44121	0,25018	0,12524	0,06758	0,06432	0,09491
170°	1,12089	1,18310	1,12452	0,99209	0,82407	0,64704	0,47923	0,33261	0,21396	0,12591
175°	1,13582	1,24926	1,27231	1,23978	1,17145	1,08591	0,99032	0,89073	0,79104	0,69398
180°	1,14088	1,27218	1,32547	1,33164	1,31120	1,27680	1,23435	1,18806	1,14036	1,09262

Akustisches Schrifttum des Jahres 1941 (Nachtrag)

Bearbeitet von K. Patermann

1. Allgemeines und Gesamtdarstellungen

Anwendung von Schall in der Metallurgie. W. Becker. Neuheiten Techn. (russ.) **10** (1941) Nr. 4, S. 25—26.

Smoke eliminated by sound. Sci. Digest 8 (1940) S. 94 bis 95.

Musical „micro-scales" and „micro-melodies". H. Werner. J. Psych. **10** (1940) S. 149—156.

Detecting trapped persons after air raids. St. Pancras emergency Committee's initiative with sound-amplifying apparatus. Electr. Rev., Lond. **129** (1941) S. 363.

Muscle sounds of a single twitch. G. van Rijnberk & H. D. Bouman. Proc. Amsterdam **43** (1940) Nr. 3, S. 350—355.

Les amplificateurs de sons sur les camions pour la réception des signaux de la route. Augustin Dumont. Gén. civ. **67** (1941) Nr. 13/14, S. 127—131.

2. Physikalische Akustik

An oblique incidence of sound on resonance absorber. K. Vital. J. techn. Phys. (russ.) **10** (1940) Nr. 12, S. 980—987.

Musical acoustics. E. G. Richardson. Rep. Progr. in Phys. **7** (1940) S. 27—35.

Sur la propagation du son dans l'atmosphère et le temps de parcours de l'onde sonore. S. Tschibissoff. Bull. Acad. Sci. URSS Sér. Géogr. 1940 Nr. 2, S. 207—222.

An electromagnetic sound generator for producing intense high frequency sound. H. W. St. Clair. Rev. sci. Instrum. **12** (1941) Nr. 5. S. 250—255.

The thermoregenerated tube as a sound receiver. K. F. Theodortschik & K. Welezhanina (Veleganina). J. of Phys. USSR **3** (1940) Nr. 1, S. 23—30. J. techn. Phys. (russ.) **10** (1940) Nr. 13, S. 1138—1139.

Velocity of sound. R. C. Colwell. J. Franklin Inst. **230** (1940) S. 749—754.

The supersonic oscillator. Bernard H. Porter. Ind. Engng. Chem. Analyt. ed. **12** (1940) S. 748—749.

Some acoustical source-observer problems. S. W. Redfearn. Phil. Mag. **30** (1940) S. 223—236.

Formula for the change of velocity of sound with temperature. A. E. Bate. Nature, Lond. **144** (1939) Nr. 3645, S. 479.

Die schalltechnischen Eigenschaften des Glases. K. Schuster. Glastechn. Ber. **18** (1940) Nr. 7, S. 213—220.

The propagation of pressure fluctuations of large amplitude in air columns. L. J. Kastner. Phil. Mag. **32** (1941) Nr. 212, S. 206—224.

On acoustically effective vortex motion in gaseous jets. P. Saic. Phil. Mag. **32** (1941) Nr. 212, S. 245—252.

Velocity of sound in some binary alloys. George E. Allan. Phil. Mag. **32** (1941) Nr. 211, S. 165—170.

A signal generator for the range 50 to 400 Mc/s. J. M. van Beuren. Electronics, N. Y. **14** (1941) Nr. 12, S. 34—35.

The extraction of antigens by sound waves. Science **93** (1941) Nr. 2408, S. 10.

Der Energiesatz bei ungedämpften und gedämpften Schwingungen. Ernst Lenz. Z. f. Unterr. **54** (1941) Nr. 2, S. 33—41, Nr. 3, S. 66—76.

The sensitive flame. E. N. da C. Andrade. Proc. Phys. Soc. **53** (1941) Nr. 298, S. 329—355.

Solid carbon dioxide as an exciter of vibrations. Mary D. Waller. Nature, Lond. **148** (1941) Nr. 3746, S. 185—187.

Vereinfachte mathematische Behandlung der Theorie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Absorption von Schallwellen in Gasen. P. Mariens. Meded. Kon. Vlaamsche Acad. Wetensch. 1940 Nr. 11, S. 3—38.

Sound velocity in liquid mixtures. M. R. Rao. Current Science, Bangalore **9** (1940) Nr. 12, S. 534.

Entretien d'une onde stationaire. II. Marcel Fouché. Rev. Fac. Sc. Univ. d'Istambul (A) **5** (1940) Nr. 3/4, S. 103—109.

Hörbarer und unhörbarer Schall in der Technik. E. Lubcke. Techn. Mitt., Essen 1941, S. 259—263, 330—334.

On the absorption of sound in dielectrics. J. Pomeranchuk. J. experm. theor. Phys. (russ.) **11** (1941) Nr. 4, S. 455—462.

Proprietésasymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibration. Ake Pleijel. Ark. Mat., Astron. och Fys. (A) **27** (1940) Nr. 13, 100 S.

Görk, Eugen. Gesetzmäßigkeiten bei Regelvorgängen. Dissertation TH Stuttgart 1941.

Knötzel, Helmut. Absorption hörbaren Schalles in Luft und ihre Abhängigkeit von Feuchte und Temperatur. Dissertation Marburg 1940. Abgedruckt in Akust. Z. **5** (1940) Nr. 5, S. 245—256.

Buschmann, Karl-Friedrich. Untersuchungen der Anregbarkeit verschiedener Normalschwingungen auf Grund exakter Schalldispersionsmessungen. Dissertation, Göttingen 1941.

3. Siebketten (elektrische und akustische)

Improving crystal filter performance: a 455 Kc/s filter with wide-range selectivity variation. D. Bacon. QST **24** (1940) Nr. 12, S. 58—60, 86.

On a wide band-pass effect in crystals associated with negative-impedance elements, and the development of wide-band low-loss crystal band-pass filters. S. P. Chakravarti u. N. L. Dutt. Indian J. of Phys. **14** (1940) Part 4, S. 295—310.

Filter-design: design and characteristics of low- and high-pass filters. L. J. Giacoletto. Communic. **21** (1941) Nr. 8, S. 14—15.

Simple quartz-crystal filters of variable band-with. G. Builder & J. E. Benson. Amalgam. Wireless Australia techn. Rev. **5** (1941) Nr. 3, S. 93—103.

Mühlner, Joachim. Bandfilter ohne und mit Rückkopplung. Dissertation TH Dresden 1939. Abgedruckt in Hochfrequenztechn. **54** (1939) Nr. 3, S. 80—93.

Haase, Kurt Harald. Grafische Verfahren zur Eigenschaftskonstruktion elektrischer Wellenfilter. Dissertation TH München 1939.

4. Meßtechnik

Metodo di misura rapida e precisa delle frequenze. F. Vecchiacchi e A. Barone. R. C. Sci. Fis. R. Accad. Italia II (1940) Nr. 7, S. 542—552.

Some observations concerning the transient behaviour of radio noise meters. C. M. Burrill. Electronics, N. Y. **14** (1941) Nr. 12, S. 35, 85.

Sur le son d'axe des corps tournant à grande vitesse. Une nouvelle source sonore étalon. E. Huguenard. C. R. Acad. Sci. Paris **213** (1941) Nr. 19, S. 648—650.

Vibration meter (type 761-A). Rev. sci. Instrum. **12** (1941) Nr. 10, S. 512—513.

Sound-integrating machine. Bell Labor. Rec. **19** (1941) Nr. 11, S. 342.

Gohlke, Werner. Über die Schwingungseigenschaften von Quarzdruckmeßgeräten. Dissertation TH Braunschweig 1941. 17 S.

Rüfer, Walter. Absorptionsmessungen von Ultraschallwellen in elektrolytisch leitenden Lösungen. Dissertation Gießen 1941.

Kleine, Karl-Heinz. Synthese von Klängen mittels des Zahnradgenerators. Dissertation Halle 1941. Phys. Z. **42** (1941) Nr. 6, S. 111—116.

Kuhl, Walter. Messungen zu den Theorien der Eigenschwingungen von Kreisringen beliebiger Wandstärke. Dissertation TH Berlin 1941. Abgedruckt in Akust. Z. **7** (1942) Nr. 4, S. 125—152.

La valeur des mesures de bruit. P. Baron. Electricité 1940 Nr. 68, S. 117—120.

5. Raum- und Bauakustik

Zur Anwendung der räumlichen Modelle in der Raumakustik. H. Ormestad. Norske Vidensk. Selsk. Forhandl. **14** (1941) Nr. 40, S. 149—152.

Die Schalldämmung von Holzdecken. K. Berg u. J. Holtsmark. Norske Vid. Selsk., Forh. **12** (1940) S. 149—152.

Akustik und Architektur im Kinotheater. Photogr. Ind. **38** (1940) S. 568.

Equipment practice in large broadcasting studios of the Australian broadcasting commission. W. H. Adam. Proc. Inst. Radio Engrs., Australia **4** (1940) Nr. 4, S. 56—63.

Theater comes of architectural age; Stevens sound-control technique. Arch. Rev. **88** (1940) S. 114.

Radio studio air conditioning plant approaches ultimate in sound control. Clifford Strock. Heat & Ventilating **37** (1940) S. 15—19.

Die elektroakustische Einrichtung von Rundfunksenderäumen. Jr. F. de Fremery. Philips Sendernachr. **8** (1941) Nr. 3, S. 67—78, Nr. 4, S. 103—117.

A modern control room for a commercial radio transmitter central at Rocky Point. Fletcher & Kennedy. RCA-Rev. **6** (1941) Nr. 2, S. 202—221.

Albert Hall acoustics. W. H. George. Nature, Lond. **148** (1941) Nr. 3748, S. 258. Wireless Wld. **47** (1941) Nr. 10, S. 253.

Auditorium acoustics. R. Howard Cricks. Electronics & Television **13** (1940) S. 438—440.

A novel highly effective sound-absorbing arrangement, and the construction of a dead room. E. Meyer. J. acoust. Soc. Amer. **13** (1941) Nr. 2, S. 191—193.

Sound in the theater. Electronics, N. Y. **13** (1940) Nr. 4, S. 99. Auszug aus J. acoust. Soc. Amer. **11** (1940) Nr. 3, S. 346—351, 380.

6. Schallübertragung und Rundfunk

A transcription control box for broadcasting from dual-turntable equipment. E. L. Marven. Electronics, N. Y. **14** (1941) Nr. 12, S. 58—66.

A flexible studio control console. H. Klimpel. Electronics, N. Y. **14** (1941) Nr. 2, S. 44—48.

Binaural transmission. Wireless Wld. **47** (1941) Nr. 1067, S. 130—131.

The „acoustic envelope". New development to aid voice production. Wireless Wld. **47** (1941) Nr. 1071, S. 233.

Meters used in radio communication. J. S. Christie. Proc. Inst. electr. Engrs. **29** (1941) Nr. 5, S. 285.

7. Schallübertragung auf Leitungen

Zum Selbstbau von Verstärkern für extrem hohe Übertragungsgüte. Harald Bode. Funk 1941 Nr. 14, S. 209—213, Nr. 16, S. 241—245.

Engineering requirements for program transmission circuits. F. A. Cowan, R. G. McCurdy & E. I. Lattimer. Bell System techn. J. **20** (1941) Nr. 2, S. 235—249.

8. Mikrophone

What is a power microphone. Electrician, Lond. **127** (1941) Nr. 3313, S. 308.

9. Membranen und Platten

The vibration of circular plates. C. R. Colwel, J. K. Stewart & H. D. Arnett. Science **92** (1940) Nr. 2392, S. 408—409.

Heinrich, Hans Ernst. Über Schwingungen und die Schallstrahlung von Membranen und Platten. Dissertation TH Hannover 1940.

10. Telephone

11. Lautsprecher und Übertragungsanlagen

The effect of a plane screen on the output of a loudspeaker. L. L. Myasnikov. J. techn. Phys. (russ.) **10** (1940) Nr. 16, S. 1372—1381.

Small-dimensional radiating and receiving systems of high directivity. S. A. Makov. C. R. Moskau (N. S.) **28** (1940) Nr. 5, S. 418—422.

The directional properties of elliptical (sound) radiators. M. J. Karnovski. J. techn. Phys. (russ.) **10** (1940) Nr. 10, S. 839—842, Nr. 12, S. 970—979.

Emergency operation of sound systems. Paul P. Melroy. Intern. Projectionist April 1940, S. 7—12.

A low frequency horn of small dimensions. Paul W. Klipsch. J. acoust. Soc. Amer. **13** (1941) S. 137 bis 144.

Measurement of orchestral pitch. O. J. Murphy. Bell Labor. Rec. **19** (1941) S. 143—146.

12. Tonfilmtechnik

Le réglage d'une station d'enregistrement électrique des sons. Octave Robert. Electricité **25** (1941) S. 154 bis 159.

SCHRIFTTUM

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. Von Dr. Ludwig Bergmann, o. Professor für Physik und Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule Breslau. Dritte, völlig überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin 1942. VDI-Verlag G. m. b. H. DIN A 5, 457 S. mit 269 Bildern und 47 Tafeln. Gebunden 25,— RM.

Schon 3 Jahre nach der zweiten Auflage erscheint die 3. Auflage des „Bergmann", nicht nur ein Beweis dafür, daß Physik und Technik des Ultraschalls ein immer weiteres Feld sich erobert haben, sondern daß die Darstellung, die Bergmann dem Gebiet gegeben hat, sich größter Beliebtheit erfreut. Es ist bei dem Verfasser selbstverständlich, daß das Buch sich wiederum dem neuesten Stand der Forschung angepaßt hat. Rein äußerlich kommt dies schon dadurch zum Ausdruck, daß der Umfang um etwa $^1/_4$ angewachsen ist; das Literaturverzeichnis zählt in der jetzigen Auflage fast 1100 Nummern, in der vorhergehenden waren es knapp 700. Die bewährte Einteilung des Buches ist die gleiche geblieben, besonders haben die Abschnitte über die praktische Anwendung des Ultraschalls eine wesentliche Erweiterung erfahren. Nicht nur in der Akustik, sondern in sehr vielen Zweigen der Technik wird es dankbar begrüßt werden, daß Verfasser und Verlag trotz der zeitbedingten Schwierigkeiten die große Arbeit auf sich genommen haben, eine völlig überarbeitete und erweiterte Auflage herauszubringen. Eine besondere Empfehlung mitzugeben, ist überflüssig. Der „Bergmann" wird auch in Zukunft der zuverlässige Ratgeber für alle Interessenten des Ultraschalls sein. E. Meyer.

Hermann Schulz, **Über Wesen, Sinn und Zweck der Laplace-Transformation** (Eine Einführung für den Fernmeldetechniker). Sonderdruck aus „Telegraphen-, Fernsprech-, Funk- und Fernseh-Technik", Hefte 4, 5 u. 6, 1940, u. Hefte 4 u. 5, 1941. Verlag Richard Dietze, Berlin W 62. 43 S. 17 Abb.

Der Verfasser gibt in seiner Arbeit eine Einführung in die Theorie der Laplace-Transformation und ihrer Anwendungen, die es dem bisher nicht mit der Materie vertrauten Leser ermöglichen soll, dieses Verfahren mit Erfolg bei Problemen der Fernmeldetechnik zu benutzen. Während die bekannten Werke von G. Doetsch, „Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation", und K. W. Wagner, „Die Operatorenrechnung", sich in erster Linie an den Mathematiker wenden und auch die Arbeit von H. W. Droste, „Die Lösung angewandter Differentialgleichungen mittels Laplacescher Transformation" manchem Techniker vielleicht noch Schwierigkeiten bereitet, stellt sich der Verf. ganz auf den Standpunkt des auf die Anwendungen bedachten Lesers. Er vermeidet daher strenge und ausführliche Beweise, sondern erläutert in klarer und leicht verständlicher Sprache die Eigenschaften des $\mathfrak{L}$-Integrals.

Die Laplace-Transformation besteht in der funktionalen Umformung einer gegebenen Funktion $F(t)$ durch die Integralbildung:

$$\mathfrak{L}\,F(t) = \int_0^\infty F(t)\,e^{-pt}\,dt = f(p)\,.$$

Die Funktion $F(t)$ geht dabei in eine in einem gewissen Bereich definierte Funktion $f(p)$ über, sofern das Integral konvergiert. Über die Beziehungen zwischen $F(t)$ und der „Bildfunktion" $f(p)$ und das Rechnen mit diesen Funktionen bestehen eine Reihe Gesetzmäßigkeiten, von denen besonders die über die Differentiation und Integration von Bedeutung sind. Einer Differentiation von $F(t)$ entspricht eine Multiplikation mit p im Bildbereich, einer Integration eine Multiplikation mit $\frac{1}{p}$. Die $\mathfrak{L}$-Transformation einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung von $F(t)$ geht daher in das mit einem Polynom n-ten Grades von p multiplizierte $\mathfrak{L}$-Integral von $F(t)$ über. Auf Grund dieser und noch weiterer Sätze läßt sich ein allgemeines Rechenverfahren zur Lösung von linearen Differentialgleichungen angeben. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei, daß sich nicht nur die stationären Lösungen ergeben, sondern auch die Ein- und Ausschwingvorgänge miterfaßt werden. Der Verf. erläutert das Verfahren zunächst an Hand einfacher Beispiele, deren Lösungen bereits wohlbekannt sind, wie z. B. der Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand. Er erreicht dadurch, daß der Leser Vertrauen zu der Methode gewinnt und sich von ihrer Eleganz und Schlagkraft überzeugt. Nach diesen einfachen Beispielen werden dann verzweigte Stromkreise und allgemeine Netzwerke behandelt, wobei noch ein Kapitel über Partialbruchzerlegung von gebrochenen rationalen Funktionen eingeschaltet wird. Zum Schluß wird auf die Telegraphenleitung eingegangen und eine Reihe von Leitungstypen diskutiert.

Die Arbeit, welche sich durch ihre klare, scharfumrissene Darstellung auszeichnet, dürfte zahlreiche Fernmeldetechniker zur weiteren Beschäftigung mit der Laplace-Transformation anregen.

Kallenbach

Verantwortlicher Schriftleiter: Oberregierungsrat Dr. Martin Grützmacher, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstr. 2. — Druck: A. Heine G. m. b. H., Gräfenhainichen. — „I. v. W. g." — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 1. — Printed in Germany